Zkouška VPL - písemná část

4. února 2015

1. Nechť $C_n = \langle V, E\rangle$ je neorientovaný cyklus délky $n \geq 2$, t.j. graf s vrcholy $V = \{1, 2, \dots, n\}$ a hranami $E = \{\{i, i+1\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{\{n, 1\}\}$. Říkáme, že množina $A \subseteq E$ je *perfektní párování*, pokud každý vrchol je incidentní s právě jednou hranou z A.

   Chceme (rezolucí ve VL) ukázat, že pro liché n (speciálně pro $n = 3$) nemá cyklus C_n perfektní párování. Nechť $\mathbb{P}_n = \{p_{\{i,j\}} \mid \{i, j\} \in E\}$ je množina prvovýroků, kde $p_{\{i,j\}}$ reprezentuje, že *"hrana $\{i, j\}$ je v množině A"*.

   (a) Napište výrok φ_i, kde $1 \leq i \leq n$, nad $\mathbb{P}_n$ vyjadřující, že *"i-tý vrchol je incidentní s právě jednou hranou z A"*. Pomocí výroků φ_i napište teorii T_n vyjadřující, že *"množina A je perfektní párování." (2b)*

   (b) Nechť nyní $n = 3$. Nalezněte množinovou reprezentaci teorie T_3. *(2b)*

   (c) Ukažte rezolucí, že T_3 je nesplnitelná teorie. *(4b)*

   (d) Je $T_3 \vdash_{LI} \square$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Jsou dána následující tvrzení:

   (i) Existuje student, který pokud složí zkoušku z logiky, tak zkoušku z logiky složí všichni studenti.

   (ii) Existuje student, který pokud složí zkoušku z logiky, tak všichni studenti složí zkoušku z algebry.

   (a) Formalizujte tvrzení (i), (ii) po řadě jako sentence φ, ψ v jazyce $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, R jsou unární relační symboly a $P(x)$, $R(x)$ značí, že *"student x složí zkoušku z logiky"*, resp. *"student x složí zkoušku z algebry". (2b)*

   (b) Tablo metodou rozhodněte, které z formulí φ, ψ jsou logicky pravdivé. Jako zdůvodnění uveďte příslušná dokončená tabla. *(4b)*

   (c) Zvolte libovolnou bezespornou větev V v jednom z tabel z (b) a sestrojte kanonický model $\mathcal{A}$ z větve V. *(2b)*

   (d) Je teorie $\{\psi\}$ v jazyce L konzervativní extenzí teorie $\{\varphi\}$ v jazyce $L' = \langle P\rangle$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y) f(y) = x,\ f(x) = f(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle f\rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.

   (a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu g takovou, že $T' \models f(g(x)) = x$. *(2b)*

   (b) Napište formuli $\varphi(x, y)$ jazyka L takovou, že $T' \models \varphi(x, y) \leftrightarrow g(g(x)) = y$. *(2b)*

   (c) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, f^A\rangle$, kde $f^A(m) = m+2$ pro každé $m \in \mathbb{Z}$. Kolik má struktura $\mathcal{A}$ navzájem neizomorfních podstruktur? *(2b)*