

Zkouška VPL - písemná část

5. února 2015

1. Necht' prvovýroky n, m, p reprezentují (po řadě), že "lidé nosí deštníky", "meteorologové hlásí déšť", "prší" a označme $\mathbb{P} = \{n, m, p\}$. Víme, že
 - (i) *Neprší-li, lidé nenosí deštníky.*
 - (ii) *Hlásí-li meteorologové déšť, lidé nosí deštníky.*
 - (iii) *Nehlásí-li meteorologové déšť, prší.*
 - (a) Napište výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad \mathbb{P} vyjadřující po řadě (i), (ii), (iii) a pomocí implikačního grafu ukažte, že teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ je bezesporná. (3b)
 - (b) Rezolucí dokažte, že z T vyplývá, že *prší*. (3b)
 - (c) Určete množinu $M^{\mathbb{P}}(T)$ všech modelů teorie T nad \mathbb{P} . (2b)
 - (d) Kolik je (až na ekvivalenci) výroků nad \mathbb{P} , které jsou nezávislé v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Necht' $T = \{(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, x)), (\exists x)(\forall y)(\neg P(y) \rightarrow R(x, y)), (\forall x)(\exists y)(\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, y))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovností, kde P, R je unární resp. binární relační symbol.
 - (a) Skolemizací nalezněte k T ekvivalentní teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
 - (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nespílitelná. (4b)
 - (c) Necht' T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* (2b)
 - (d) Je teorie T kompletní? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Necht' $T = \{R(x, x), R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y, R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), R(x, y) \vee R(y, x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle R \rangle$ s rovnostmi, kde R je binární relační symbol. Necht' φ označuje sentenci $(\forall x)(\exists y)(R(x, y) \wedge \neg(x = y))$.
 - (a) Je φ dokazatelná / vyvratitelná / nezávislá v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (b) Je T ω -kategorická? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (c) Je teorie $T' = T \cup \{\varphi\}$ konzervativní extenze teorie T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)