

Zkouška VPL - písemná část

10. února 2015

1. Jsou dány dva výroky nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$:

$$\varphi : (\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge \neg q,$$

$$\psi : (p \vee t) \wedge (\neg q \vee \neg r).$$

- (a) Pomocí implikačního grafu rozhodněte, zda je výrok $\varphi \wedge \psi$ splnitelný. (2b)
(b) Tablo metodou určete množinu $M^{\mathbb{P}'}(\varphi)$ všech modelů φ nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$. (3b)
(c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků nad \mathbb{P}' pravdivých v $\{\varphi\}$? Uveďte zdůvodnění. (2b)
(d) Je teorie $\{\varphi, \psi\}$ nad \mathbb{P} konzervativní extenzí teorie $\{\varphi\}$ nad \mathbb{P}' ? (2b)
2. Jsou dána následující tvrzení:

- (i) Někdo nezná otce své matky nebo je každý v databázi.
(ii) Každý, kdo o někom slyšel, zná otce své matky.
(iii) Někdo není v databázi.

Ukažte rezolucí, že pak:

- (iv) Někdo neslyšel o své matce.

Konkrétně:

- (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ jazyka $L = \langle S, Z, D, o, m \rangle$ bez rovnosti, kde S je binární relační symbol a $S(x, y)$ značí, že “ x slyšel o y ”, Z je binární relační symbol a $Z(x, y)$ značí, že “ x zná y ”, D je unární relační symbol a $D(x)$ značí, že “ x je v databázi”, f, g jsou unární funkční symboly a $o(x), m(x)$ reprezentují “otce x ”, resp. “matku x ”. (2b)
(b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \models \varphi_4$. (2b)
(c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. (2b)
(d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí tři rezoluční kroky.* (3b)
(e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T' , která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (d).* (2b)
3. Nechť T je teorie jazyka $L = \langle f, g, a \rangle$ s rovnostmi, kde f, g, a jsou (po řadě) binární, unární a nulární funkční symboly, s následujícími axiomy

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z),$$

$$f(a, x) = x \quad \wedge \quad f(x, a) = x,$$

$$f(x, g(x)) = a \quad \wedge \quad f(g(x), x) = a.$$

- (a) Je sentence $(\forall x)(\forall y)f(x, y) = f(y, x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
(b) Uvažme strukturu $\mathbb{Z}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0 \rangle$, kde $+, -$ jsou standardní sčítání a (unární) mínus modulo 4. Je teorie $\text{Th}(\mathbb{Z}_4)$ jednoduchá extenze teorie T ? Je $\text{Th}(\mathbb{Z}_4)$ kompletní? Uveďte zdůvodnění. (2b)
(c) Nalezněte všechny podstruktury \mathbb{Z}_4 . Jsou všechny modelem teorie T ? Zdůvodněte. (2b)
(d) Nechť $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi. Existuje reduct \mathbb{Q} , který je modelem T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)