

## Zkouška VPL - písemná část

12. února 2015

1. Mějme tři bratry, přičemž o každém víme, že buď vždy říká pravdu anebo vždy lže.

- (i) Nejstarší říká: “Právě jeden z mých bratrů je lhář.”
- (ii) Prostřední říká: “Aspoň jeden z mých bratrů je lhář.”
- (iii) Nejmladší říká: “Nejvýše jeden z mých bratrů je lhář.”

Nechť prvovýroky  $p_1, p_2, p_3$  reprezentují (po řadě), že “nejstarší / prostřední / nejmladší bratr je pravdomluvný” a označme  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ .

- (a) Napište výroky (ve tvaru ekvivalence)  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  nad  $\mathbb{P}$  reprezentující znalosti vyplývající (po řadě) z (i), (ii), (iii). (2b)
  - (b) Určete množinu  $M^{\mathbb{P}}(T)$  všech modelů teorie  $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  nad  $\mathbb{P}$ . (2b)
  - (c) Dokažte pomocí rezoluce, že z  $T$  vyplývá, že nejmladší bratr je pravdomluvný. (4b)
  - (d) Odpoví-li nám prostřední bratr na otázku: “Složil už někdo z vás zkoušku z logiky?”, budeme vědět, jak na tutéž otázku odpoví ostatní bratři? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Nechť  $T = \{(\forall x)\neg P(x, x), (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)), (\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow P(x, x)), (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P \rangle$  bez rovnosti, kde  $P$  je binární relační symbol.
- (a) Skolemizací nalezněte k  $T$  ekvivalentní teorii  $T'$  (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
  - (b) Tablo metodou dokažte, že  $T'$  je nespílitelná. (4b)
  - (c) Nechť  $T''$  je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie  $T'$ . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $T''$ , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* (2b)
  - (d) Je teorie  $T$  kompletní? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Nechť  $T = \{R(x, y) \rightarrow x = y, \varphi\}$  je teorie jazyka  $L = \langle R \rangle$  s rovností, kde  $R$  je binární relační symbol a axiom  $\varphi$  vyjadřuje, že “existují právě 3 prvky”.
- (a) Určete, kolik má teorie  $T$  navzájem neizomorfních modelů. (2b)
  - (b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie  $T$ . (2b)
  - (c) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)
  - (d) Nechť  $T' = T \cup \{R(c_1, c_1), \neg R(c_2, c_2)\}$  je teorie v jazyce  $L = \langle R, c_1, c_2 \rangle$  s rovností, kde  $c_1, c_2$  jsou nové konstantní symboly. Je  $T'$  konzervativní extenze  $T$ ? Uveďte zdůvodnění. (2b)