

Výroková a predikátová logika - VIII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2015/2016

Tablo metoda v PL - rozdíly

- Formule v položkách budou **sentence** (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme **nová atomická tabla** pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat **konstantní termy** dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o **nové (pomocné) konstantní symboly** (spočetně mnoho) pro reprezentaci “svědků” položek $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$.
- V **dokončené** bezesporné větvi s položkou $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ budou **instance** $T\varphi(x/t)$ resp. $F\varphi(x/t)$ pro každý konstantní term t (rozšířeného jazyka).

Atomická tabla - nová

Atomická tabla jsou i následující (položkami značkové) stromy, kde φ je libovolná formule jazyka L_C ve volné proměnné x , t je libovolný konstantní term jazyka L_C a c je **nový** konstantní symbol z $L_C \setminus L$.

#	$T(\forall x)\varphi(x)$	*	$F(\forall x)\varphi(x)$	*	$T(\exists x)\varphi(x)$	#	$F(\exists x)\varphi(x)$
	$T\varphi(x/t)$		$F\varphi(x/c)$		$T\varphi(x/c)$		$F\varphi(x/t)$
	pro libovolný konst. term t		pro <i>novou</i> konstantu c		pro <i>novou</i> konstantu c		pro libovolný konst. term t

Poznámka Konstantní symbol c reprezentuje "svědka" položky $T(\exists x)\varphi(x)$ či $F(\forall x)\varphi(x)$. Jelikož nechceme, aby na c byly kladeny další požadavky, je v definici tabla omezeno, jaký konstantní symbol c lze použít.

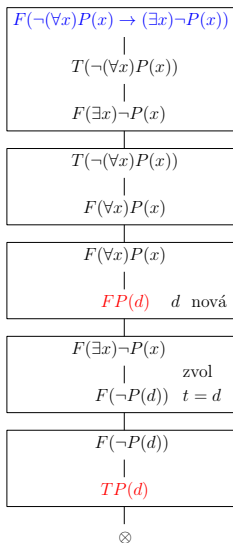
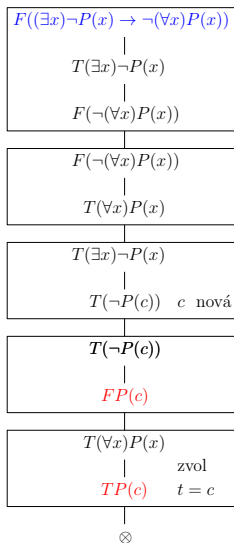
Tablo

Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkový strom s předpisem

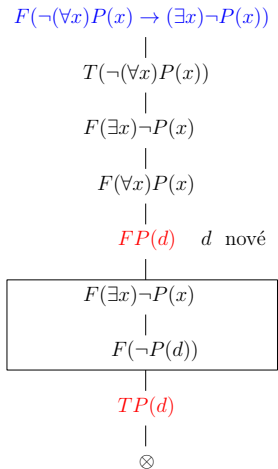
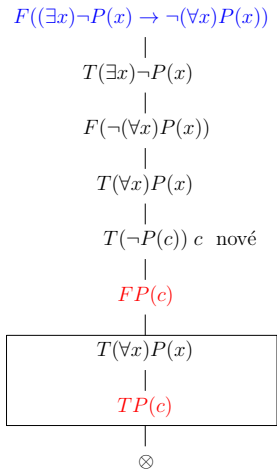
- (i) každé atomické tablo je konečné tablo z T , přičemž v případě (*) lze použít libovolný konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla z T , pak připojením atomického tabla pro P na **konec větve** V vznikne konečné tablo z T , přičemž v případě (*) lze použít pouze konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$, který se dosud **nevyskytuje** na V ,
- (iii) je-li V větev konečného tabla z T a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec větve V vznikne rovněž konečné tablo z T .
- (iv) každé konečné tablo z T vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii), (iii).

Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (iii), formálně $\tau = \cup \tau_n$.

Konstrukce tabla



Konvence



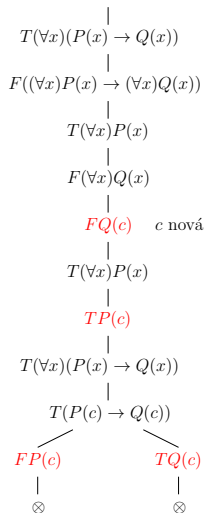
Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větev znovu zapisovat kromě případů, kdy položka je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$.

Tablo důkaz

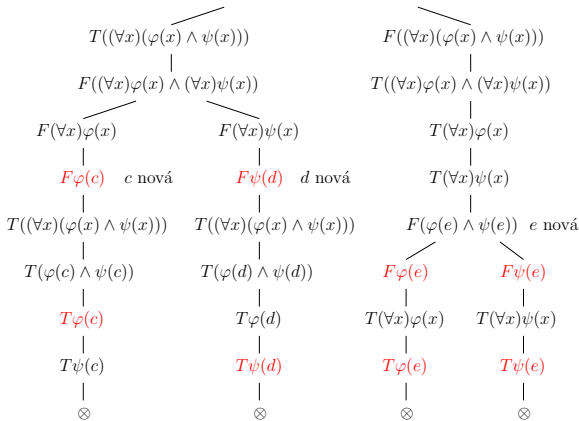
- Větev V tabla τ je **sporná**, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou sentenci φ , jinak je **bezesporná**.
- Tablo τ je **sporné**, pokud je každá jeho větev sporná.
- **Tablo důkaz** (**důkaz tablem**) sentence φ z teorie T je **sporné tablo** z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- φ je (**tablo**) **dokazatelná** z teorie T , píšeme $T \vdash \varphi$, má-li tablo důkaz z T .
- **Zamítnutí** sentence φ **tablem** z teorie T je **sporné tablo** z T s položkou $T\varphi$ v kořeni.
- Sentence φ je (**tablo**) **zamítnutelná** z teorie T , má-li zamítnutí tablem z T , tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady

$$F((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)))$$



$$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)))$$



Dokončené tablo

Chceme, aby dokončená bezesporná větev poskytovala *protipříklad*.

Výskyt položky P ve vrcholu v tabla τ je *i -tý*, pokud v má v τ právě $i - 1$ předků označených P a je *redukováný* na větvi V skrze v , pokud

- P není tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$ a P se vyskytuje na V jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k rozvoji P na V , nebo
- P je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$, má $(i + 1)$ -ní výskyt na V a zároveň se na V vyskytuje $T\varphi(x/t_i)$ resp. $F\varphi(x/t_i)$, kde t_i je i -tý konstantní term (jazyka L_C).

Nechť V je větev tabla τ z teorie T . Řekneme, že

- větev V je *dokončená*, je-li sporná, nebo každý výskyt položky na V je redukováný na V a navíc V obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.

Systematické tablo - konstrukce

Nechť R je položka a $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ je (konečná či nekonečná) teorie.

- (1) Za τ_0 vezmi atomické tablo pro R . V případě (*) vezmi lib. $c \in L_C \setminus L$, v případě (#) za t vezmi term t_1 . Dokud to lze, aplikuj následující kroky.
- (2) Nechť v je **nejlevější** vrchol v co **nejmenší** úrovni již daného tabla τ_n obsahující výskyt položky P , který není redukovaný na nějaké bezesporné větvi **skrže** v . (Neexistuje-li v , vezmi $\tau'_n = \tau_n$ a jdi na (4).)
- (3a) Není-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n přidáním atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrže v . V případě (*) za c vezmi c_i pro nejmenší možné i .
- (3b) Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ a ve v má i -tý výskyt, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrže v , přičemž za t vezmi term t_i .
- (4) Za τ_{n+1} vezmi tablo vzniklé z τ'_n přidáním $T\varphi_n$ na každou bezespornou větev neobsahující $T\varphi_n$. (Neexistuje-li φ_n , vezmi $\tau_{n+1} = \tau'_n$.)

Systematické tablo z T pro R je výsledkem uvedené konstrukce, tj. $\tau = \bigcup \tau_n$.

Systematické tablo - příklad

$$T((\exists y)(\neg R(y, y) \vee P(y, y)) \wedge (\forall x)R(x, x))$$

$$T(\exists y)(\neg R(y, y) \vee P(y, y))$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$T(\neg R(c_0, c_0) \vee P(c_0, c_0)) \quad c_0 \text{ nová}$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$TR(c_0, c_0) \quad (\text{za předpokladu } t_1 = c_0)$$

$$T(\neg R(c_0, c_0))$$

$$TP(c_0, c_0)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$TR(t_2, t_2)$$

$$TR(t_2, t_2)$$

$$FR(c_0, c_0)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$\otimes$$

$$TR(t_3, t_3)$$

$$\vdots$$

Systematické tablo - dokončenost

Tvrzení Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ **dokončené**.

Důkaz Necht' $\tau = \cup \tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ s R v kořeni a necht' P je položka ve vrcholu v tabla τ .

- Do úrovně v (včetně) je v τ jen konečně mnoho výskytů všech položek.
- Kdyby výskyt P ve v byl neredukovaný na nějaké bezesporné větvi v τ , byl by vybrán v nějakém kroku (2) a zredukován v (3a) či (3b).
- Každá $\varphi_n \in T$ bude dle (4) nejpozději v τ_{n+1} na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokončené větve. \square

Tvrzení Je-li systematické tablo τ důkazem (z teorie T), je τ konečné.

Důkaz Kdyby bylo τ nekonečné, dle **Königova lemmatu** by obsahovalo nekonečnou větev. Tato větev by byla bezesporná, neboť při konstrukci τ se sporné větve neprodlužují. Pak by ale τ nebylo sporné. \square

Rovnost

Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností jsou

$$(i) \quad x = x$$

$$(ii) \quad x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$$

pro každý n -ární funkční symbol f jazyka L .

$$(iii) \quad x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$$

pro každý n -ární relační symbol R jazyka L včetně $=$.

Tablo důkaz z teorie T jazyka L *s rovností* je tablo důkaz z teorie T^* , kde T^* je rozšíření teorie T o axiomy rovnosti pro L (resp. jejich generální uzávěry).

Poznámka V kontextu logického programování má rovnost často jiný význam než v matematice (identita). Např. v Prologu $t_1 = t_2$ znamená, že t_1 a t_2 jsou unifikovatelné.

Kongruence a faktorstruktura

Nechť \sim je ekvivalence na A , $f : A^n \rightarrow A$ a $R \subseteq A^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak \sim je

- **kongruence pro funkci** f , pokud pro každé $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$ platí

$$x_1 \sim y_1 \wedge \dots \wedge x_n \sim y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n),$$
- **kongruence pro relaci** R , pokud pro každé $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$ platí

$$x_1 \sim y_1 \wedge \dots \wedge x_n \sim y_n \Rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \dots, y_n)).$$

Nechť ekvivalence \sim na A je kongruence pro každou funkci i relaci struktury

$\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$ pro jazyk $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. **Faktorstruktura (podílová struktura)**

struktury \mathcal{A} dle \sim je struktura $\mathcal{A}/\sim = \langle A/\sim, \mathcal{F}^{A/\sim}, \mathcal{R}^{A/\sim} \rangle$, kde

$$f^{A/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) = [f^A(x_1, \dots, x_n)]_{\sim}$$

$$R^{A/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) \Leftrightarrow R^A(x_1, \dots, x_n)$$

pro každé $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ a $x_1, \dots, x_n \in A$, tj. funkce a relace jsou definované z \mathcal{A} pomocí **reprezentantů**.

Např. \mathbb{Z}_p je faktorstruktura $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ dle kongruence modulo p .

Význam axiomů rovnosti

Nechť \mathcal{A} je struktura pro jazyk L , ve které je rovnost interpretovaná jako relace $=^A$ splňující axiomy rovnosti, tj. ne nutně identita.

- 1) Z axiomů (i) a (iii) plyne, že relace $=^A$ je **ekvivalence** na A .
- 2) Axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že relace $=^A$ je **kongruence** pro každou funkci a relaci v \mathcal{A} .
- 3) Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, je i $(\mathcal{A}/=^A) \models T^*$, kde $\mathcal{A}/=^A$ je **faktorstruktura** struktury \mathcal{A} dle $=^A$, přičemž rovnost je v $\mathcal{A}/=^A$ interpretovaná jako identita.

Na druhou stranu, v každém modelu, v kterém je rovnost interpretovaná jako identita, všechny axiomy rovnosti evidentně platí.

Korektnost

Řekneme, že struktura \mathcal{A} se **shoduje s položkou** P , pokud P je $T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo pokud P je $F\varphi$ a $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Navíc, \mathcal{A} se **shoduje s větví** V , shoduje-li se s každou položkou na V .

Lemma *Nechť \mathcal{A} je model teorie T jazyka L , který se shoduje s položkou R v kořeni tabla $\tau = \cup \tau_n$ z T . Pak \mathcal{A} lze **expandovat** do jazyka L_C tak, že se shoduje s **nějakou** větví V v tablu τ .*

Poznámka *Postačí nám expanze modelu \mathcal{A} o konstanty c^A pro $c \in L_C \setminus L$ vyskytující se na větví V , ostatní konstanty lze dodefinovat libovolně.*

Důkaz Indukcí dle n nalezneme větev V_n v tablu τ_n a expanzi \mathcal{A}_n modelu \mathcal{A} o konstanty c^A pro $c \in L_C \setminus L$ na V_n tak, že \mathcal{A}_n se shoduje s V_n a $V_{n-1} \subseteq V_n$.

Předpokládejme, že máme větev V_n v τ_n a expanzi \mathcal{A}_n shodující se s V_n .

- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n bez prodloužení V_n , položme $V_{n+1} = V_n$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$.
- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n připojením $T\varphi$ k V_n pro nějaké $\varphi \in T$, necht' V_{n+1} je tato větev a $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$. Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi$, shoduje se \mathcal{A}_{n+1} s V_{n+1} .

Korektnost - důkaz (pokr.)

- Jinak τ_{n+1} vznikne z τ_n prodloužením V_n o atomické tablo nějaké položky P na V_n . Z indukčního předpokladu víme, že \mathcal{A}_n se shoduje s P .
- (i) V případě atomického tabla pro spojku položme $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$ a snadno ověříme, že V_n lze prodloužit na větev V_{n+1} shodující se s \mathcal{A}_{n+1} .
- (ii) Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$, necht' V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1} , tj. o položku $T\varphi(x/t)$. Necht' \mathcal{A}_{n+1} je libovolná expanze \mathcal{A}_n o nové konstanty z termu t . Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\forall x)\varphi(x)$, platí $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/t)$. Obdobně pro P tvaru $F(\exists x)\varphi(x)$.
- (iii) Je-li P tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$, necht' V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1} , tj. o položku $T\varphi(x/c)$. Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\exists x)\varphi(x)$, pro nějaké $a \in A$ platí $\mathcal{A}_n \models \varphi(x)[e(x/a)]$ pro každé ohodnocení e . Necht' \mathcal{A}_{n+1} je expanze \mathcal{A}_n o novou konstantu $c^A = a$. Pak $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/c)$. Obdobně pro P tvaru $F(\forall x)\varphi(x)$.

Základní krok pro $n = 0$ plyne z obdobné analýzy atomických tabel pro položku R v kořeni s využitím předpokladu, že model \mathcal{A} se shoduje s R . □

Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda v predikátové logice je *korektní*.

Věta Pro každou teorii T a sentenci φ , je-li φ tablo dokazatelná z T , je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Důkaz

- Necht' φ je tablo dokazatelná z teorie T , tj. existuje sporné tablo τ z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že φ není pravdivá v T , tj. existuje model \mathcal{A} teorie T , ve kterém φ neplatí (**protipříklad**).
- Jelikož se \mathcal{A} shoduje s položkou $F\varphi$, dle předchozího lemmatu lze \mathcal{A} expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví v tablu τ .
- To ale není možné, neboť každá větev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici $T\psi, F\psi$ pro nějakou sentenci ψ . \square

Kanonický model

Z bezesporné větve V dokončeného tabla vyrobíme model, který se shoduje s V . Vyjdeme z dostupných syntaktických objektů - *konstantních termů*.

Nechť V je bezesporná větev dokončeného tabla z teorie T jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. *Kanonický model* z větve V je L_C -struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$, kde

- (1) A je množina všech konstantních termů jazyka L_C ,
- (2) $f^A(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) = f(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$
pro každý n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F} \cup (L_C \setminus L)$ a $t_{i_1}, \dots, t_{i_n} \in A$.
- (3) $R^A(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) \Leftrightarrow TR(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ je položka na V
pro každý n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ či *rovnost* a $t_{i_1}, \dots, t_{i_n} \in A$.

Poznámka Výraz $f(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ na pravé straně v (2) je konstantní term jazyka L_C , tedy prvek z A . Neformálně, pro zdůraznění, že jde o syntaktický objekt

$$f^A(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) = "f(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})"$$

Kanonický model - příklad

Nechť teorie $T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ je jazyka $L = \langle R, f, d \rangle$. Systematické tablo pro $F \neg R(d)$ z T obsahuje jedinou větev V a ta je bezesporná.

Kanonický model $\mathcal{A} = \langle A, R^A, f^A, d^A, c_i^A \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ z V je pro jazyk L_C a platí

$$A = \{d, f(d), f(f(d)), \dots, c_0, f(c_0), f(f(c_0)), \dots, c_1, f(c_1), f(f(c_1)), \dots\},$$

$$d^A = d, \quad c_i^A = c_i \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$

$$f^A(d) = "f(d)", \quad f^A(f(d)) = "f(f(d))", \quad f^A(f(f(d))) = "f(f(f(d)))", \quad \dots$$

$$R^A = \{d, f(d), f(f(d)), \dots, f(c_0), f(f(c_0)), \dots, f(c_1), f(f(c_1)), \dots\}.$$

Redukt \mathcal{A} na jazyk L je $\mathcal{A}' = \langle A, R^A, f^A, d^A \rangle$.

Kanonický model s rovností

Je-li jazyk L s rovností, T^* označuje rozšíření T o axiomy rovnosti pro L .

Požadujeme-li, aby rovnost byla interpretovaná jako identita, kanonický model \mathcal{A} z bezesporné větve V dokončeného tabla z T^* musíme **faktorizovat** dle $=^A$.

Dle definice (3), v modelu \mathcal{A} z V pro relaci $=^A$ platí, že pro každé $t_{i_1}, t_{i_2} \in A$,

$$t_{i_1} =^A t_{i_2} \Leftrightarrow T(t_{i_1} = t_{i_2}) \text{ je položka na } V.$$

Jelikož V je dokončená a obsahuje axiomy rovnosti, relace $=^A$ je ekvivalence na A a navíc **kongruence** pro všechny funkce a relace v \mathcal{A} .

Kanonický model s rovností z větve V je faktorstruktura $\mathcal{A}/=^A$.

Pozorování Pro každou formuli φ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}/=^A) \models \varphi,$$

přičemž v \mathcal{A} je $=$ interpretovaná relací $=^A$, zatímco v $\mathcal{A}/=^A$ jako identita.

Poznámka \mathcal{A} je (spočetně) nekonečný model, ale $\mathcal{A}/=^A$ může být konečný.

Kanonický model s rovnostmi - příklad

Nechť $T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ je nad $L = \langle R, f, d \rangle$ s rovnostmi. Systematické tablo pro $F \neg R(d)$ z T^* obsahuje bezespornou větev V .

V kanonickém modelu $\mathcal{A} = \langle A, R^A, =^A, f^A, d^A, c_i^A \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ z V pro relaci $=^A$ platí

$$s =^A t \iff t = f(\dots(f(s)\dots)) \text{ nebo } s = f(\dots(f(t)\dots)),$$

kde f je aplikováno $2i$ -krát pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

Kanonický model s rovnostmi z V je $\mathcal{B} = (\mathcal{A}/=^A) = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B, c_i^B \rangle_{i \in \mathbb{N}}$

$$(A/=^A) = \{[d]_{=^A}, [f(d)]_{=^A}, [c_0]_{=^A}, [f(c_0)]_{=^A}, [c_1]_{=^A}, [f(c_1)]_{=^A}, \dots\},$$

$$d^B = [d]_{=^A}, \quad c_i^B = [c_i]_{=^A} \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$

$$f^B([d]_{=^A}) = [f(d)]_{=^A}, \quad f^B([f(d)]_{=^A}) = [f(f(d))]_{=^A} = [d]_{=^A}, \quad \dots$$

$$R^B = (A/=^A).$$

Redukt \mathcal{B} na jazyk L je $\mathcal{B}' = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B \rangle$.

Úplnost

Lemma Kanonický model \mathcal{A} z bezesporné dok. větve V se *shoduje* s V .

Důkaz Indukcí dle struktury sentence vyskytující se v položce na V .

- Pro φ **atomickou**, je-li $T\varphi$ na V , je $\mathcal{A} \models \varphi$ dle (3). Je-li $F\varphi$ na V , není $T\varphi$ na V , neboť V je bezesporná, a tedy $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ dle (3).
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V , je $T\varphi$ a $T\psi$ na V , neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V , je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V , neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \neg\psi$, tedy $\mathcal{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)$.
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech.
- Je-li $T(\forall x)\varphi(x)$ na V , je $T\varphi(x/t)$ na V pro každé $t \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ pro každé $t \in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\exists x)\varphi(x)$ na V .
- Je-li $T(\exists x)\varphi(x)$ na V , je $T\varphi(x/c)$ na V pro nějaké $c \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tedy $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\forall x)\varphi(x)$ na V . \square

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve predikátové logice je *úplná*.

Věta Pro každou teorii T a sentenci φ , je-li φ pravdivá v T , je φ tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz Necht' φ je pravdivá v T . Ukážeme, že libovolné **dokončené** tablo (např. **systematické**) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je **sporné**.

- Kdyby ne, v tablu τ je nějaká bezesporná větev V .
- Dle předchozího lemmatu existuje struktura \mathcal{A} pro jazyk L_C shodující se s větví V , speciálně s položkou $F\varphi$ v kořeni, tj. $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.
- Necht' \mathcal{A}' je redukt struktury \mathcal{A} na původní jazyk L . Platí $\mathcal{A}' \models \neg\varphi$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy \mathcal{A}' je modelem T (neboť \mathcal{A}' se shoduje s $T\psi$ pro každé $\psi \in T$).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T .

Tedy tablo τ je důkazem φ z T . \square