Zkouška VPL - písemná část

6. ledna 2016

1. Buď $n \geq 1$ přirozené číslo a $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ (množina vrcholů). Nechť prvovýrok e_{ij} reprezentuje, že *"mezi vrcholy i a j je hrana"* a $\mathbb{P} = \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Tedy libovolný graf $G = (V, E)$ chápeme též jako ohodnocení $v\colon \mathbb{P} \to \{0, 1\}$, v němž $v(e_{ij}) = 1$ právě když $(i, j) \in E$. Nechť dále T je kompletní teorie nad $\mathbb{P}$, která má za model *jednoduchý neorientovaný* graf.

   (a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{\bigwedge_{1\leq i\leq n} \neg e_{ii}, \bigwedge_{1\leq i,j\leq n} e_{ij} \leftrightarrow e_{ji}\}$? Je T konzervativní extenzí S? Odpovědi zdůvodněte. *(2b)*

   (b) Nechť prvovýroky a_i reprezentují, že vrchol i leží v nějaké množině A, tj. strukturu (V, E, A) ztotožňujeme s ohodnocením v prvovýroků $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \cup \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, v němž navíc $v(a_i) = 1$ právě když $i \in A$. Napište výrok φ nad $\mathbb{P}'$ vyjadřující, že *"A je nezávislá množina v $G = (V, E)$"*. *(2b)*

   (c) Nechť nyní $n = 4$ a $G = (V, E)$ je 4-cyklus s *protilehlými* vrcholy 1 a 3. Zvolte si (vhodně) kompletní teorii T nad $\mathbb{P}$ tak, aby měla za model G, a převeďte $T' = T \cup \{\varphi\}$ do množinové reprezentace. *(2b)*

   (d) Rezolucí ukažte, že $T' \models (a_1 \vee a_3) \to (\neg a_2 \wedge \neg a_4)$, tj. pokud je některý z protilehlých vrcholů v nezávislé množině, není tam žádný jejich soused. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(4b)*

2. Nechť $T = \{(\exists x)(P(x) \to Q(x)),\ (\exists x)(\neg R(x) \to \neg Q(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, Q, R jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\exists x)(P(x) \to R(x))$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. *(4b)*

   (b) Z bezesporné větve předchozího tabla sestrojte model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí. *(2b)*

   (c) Je φ dokazatelná, vyvratitelná, nebo nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Má teorie T konzervativní kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

   (a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(P(x)) = x$. *(2b)*

   (b) Napište formuli $\varphi(x, y)$ jazyka L takovou, že $T' \models \varphi(x, y) \leftrightarrow P(P(x)) = y$. *(2b)*

   (c) Je teorie T ω-kategorická? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Buď $\mathcal{Z}_k = \langle \mathbb{Z}, F_k\rangle$, kde $0 < k \in \mathbb{N}$ a $F_k(m) = m + k$ pro $m \in \mathbb{Z}$. Kolik má struktura $\mathcal{Z}_k$ podstruktur? Kolik má $\mathcal{Z}_2$ vzájemně neizomorfních podstruktur? *(2b)*