

Zkouška VPL - písemná část

20. ledna 2016

1. Nechť $T = \{r \rightarrow \neg(q \rightarrow p), p \rightarrow r, \neg(q \wedge r)\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
 - (a) Tablo metodou určete všechny modely teorie T . (3b)
 - (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. (2b)
 - (c) Je T extenzí teorie $S = \{p \wedge q\}$ nad $\{p, q\}$? Je T konzervativní extenzí S ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Zjistěte, kolik je navzájem v T neekvivalentních výroků nad \mathbb{P} , které jsou v T nezávislé. Uveďte alespoň dva takové výroky. (2b)

2. Předpokládejme, že každý člověk vždy lže anebo vždy mluví pravdu. Uvažme následující tvrzení:

(i) Každému člověku jeho otec říká: "Jsi lhář nebo je můj otec lhář."

Ukažte rezolucí, že z toho vyplývá:

(ii) Má-li pravdomluvný člověk pravdomluvného otce, pak má i pravdomluvného pradědečka (v otcovské linii).

Konkrétně:

- (a) Nechť $L(x)$ značí, že " x je lhář", a $o(x)$ označuje otce x . Uvedená tvrzení (i), (ii) vyjádřete sentencemi φ, ψ jazyka $\langle L, o \rangle$ bez rovnosti tak, aby otevřené jádro sentence φ bylo ve tvaru ekvivalence. (2b)
 - (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nebo jejich negací naleznete otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nespílitelná, právě když $\varphi \models \psi$. (1b)
 - (c) Převedením axiomů T do CNF naleznete teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. (2b)
 - (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.* (4b)
 - (e) Naleznete konjunkci základních instancí axiomů T , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (d).* (2b)
3. Nechť T je extenze teorie $DeLO^{\pm}$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem i s maximálním prvkem) v jazyce $L = \langle \leq, c \rangle$ s rovnostmi bez nových axiomů, tj. pouze s rozšířeným jazykem o nový konstantní symbol c .
 - (a) Jsou sentence $(\forall x)(x \leq c)$ a $(\forall x)(c \leq x)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (b) Určete $I(T, \omega)$, tj. počet navzájem neizomorfních spočetně nekonečných modelů teorie T . (2b)
 - (c) Určete všechny (až na ekvivalenci) jednoduché kompletní extenze teorie T . (2b)
 - (d) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)