Zkouška VPL - písemná část

27. ledna 2016

1. Při vyšetřování zločinu tři podezřelí vzájemně hodnotí svoji pravdomluvnost:

   (i) *První tvrdí, že druhý lže.*

   (ii) *Druhý říká, že třetí lže.*

   (iii) *Třetí vypovídá, že první i druhý lžou.*

   Předpokládejme, že každý z nich vždy mluví pravdu nebo vždy lže. Nechť prvovýroky p_1, p_2, p_3 vyjadřují (po řadě), že *první, druhý, třetí mluví pravdu* a označme $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$.

   (a) Napište výroky (ve tvaru <u>ekvivalence</u>) φ_1, φ_2, φ_3 nad $\mathbb{P}$, jež reprezentují znalosti z výpovědí (i), (ii), (iii). *(2b)*

   (b) Nalezněte všechny modely teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ nad $\mathbb{P}$ a napište <u>elementární konjunkci</u> ψ, která je ekvivalentní s teorií T. *Nápověda: T je kompletní. (2b)*

   (c) Převeďte $T \cup \{\neg\psi\}$ do množinové reprezentace. *(2b)*

   (d) Rezolucí ukažte, že $T \models \psi$. Rezoluční odvození znázorněte rezolučním stromem. *(4b)*

2. Nechť $T = \{(\forall x)(P(x) \to R(x,x)), (\exists x)(\forall y)(\neg P(y) \to R(x,y)), (\forall x)(\exists y)(\neg R(x,y) \wedge \neg R(y,y))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, R je unární resp. binární relační symbol.

   (a) Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. *(2b)*

   (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nesplnitelná. *(4b)*

   (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T'. Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'', která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b). (2b)*

   (d) Je teorie T kompletní? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť $T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq x \to x = y, x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z, x \leq y \vee y \leq x\}$ je teorie *(lineárních uspořádání)* jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností. Nechť $\varphi(x, y)$ označuje formuli $x < y \wedge \neg(\exists z)(x < z \wedge z < y)$, kde $x < y$ je zkratka za "$x \leq y \wedge \neg(x = y)$".

   (a) Je $(\forall x)(\exists y)\varphi$ dokazatelná / zamítnutelná / nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (b) Označme $T' = T \cup \{(\forall x)(\exists y)\varphi\}$. Jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti v T' pro definici $f(x) = y$ pomocí formule $\varphi(x, y)$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (c) Je teorie $T' \cup \{f(x) = y \leftrightarrow \varphi(x, y)\}$ konzervativní extenze teorie T'? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Je teorie T' ω-kategorická? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*