

## Zkouška VPL - písemná část

3. února 2016

1. V parlamentu se projednávají tři návrhy: zavedení školného, snížení daní, zvýšení platů ve státní správě.

- (i) Strana  $\varphi$  trvá na tom, že když nebude zavedeno školné, tak se nebudou snižovat daně ani zvyšovat platy.
- (ii) Strana  $\psi$  chce, aby se nezavádělo školné, pokud se sníží daně a vyhoví se straně  $\varphi$ .
- (iii) Strana  $\chi$  požaduje, aby v případě, že se nevyhoví straně  $\psi$  nebo se nesníží daně, nebylo zavedeno školné ani se nezvyšovaly platy.

V závěrečném hlasování byly splněny požadavky všech tří stran. Byly jednotlivé návrhy přijaty, nepřijaty, či to nelze stanovit (viz otázka (c))? Necht' prvovýroky  $p, q, r$  reprezentují (po řadě) návrhy na zavedení školného, snížení daní, zvýšení platů a označme  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ .

- (a) Napište výroky  $\varphi, \psi, \chi$  nad  $\mathbb{P}$  vyjadřující požadavky jednotlivých stran. (2b)
  - (b) Převeďte teorii  $T = \{\varphi, \psi, \chi\}$  nad  $\mathbb{P}$  do množinové reprezentace pomocí  $T$ -ekvivalentních úprav (2b).
  - (c) Nalezněte všechny modely teorie  $T$  a napište elementární konjunkci  $\omega$ , která je ekvivalentní s teorií  $T$ . *Nápověda:  $T$  je kompletní.* (2b)
  - (d) Rezolucí ukažte, že  $T \models \omega$ . Rezoluční odvození znázorněte rezolučním stromem. (4b)
2. Necht'  $T = \{(\forall x)(\exists y)\neg P(x, y), (\exists x)R(x), (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, R \rangle$  bez rovnosti, kde  $P, R$  je binární resp. unární relační symbol.
- (a) Skolemizací nalezněte k  $T$  ekvivalentní teorii  $T'$  (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
  - (b) Tablo metodou dokažte, že  $T'$  je nespílitelná. (4b)
  - (c) Necht'  $T''$  je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie  $T'$ . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $T''$ , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* (2b)
  - (d) Je sentence  $(\forall x)R(x)$  pravdivá / lživá / nezávislá v  $T'$ ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Necht'  $T = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2), \neg(\exists x)(f(x) = x)\}$  je teorie jazyka  $L = \langle f \rangle$  s rovností, kde  $f$  je unární funkční symbol.
- (a) Určete izomorfní spektrum  $I(T, \kappa)$  teorie  $T$  pro spočetné  $\kappa$  (konečné i nekonečné). (2b)
  - (b) Je teorie  $T$  konzervativní extenzí teorie  $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2)\}$  jazyka  $L' = \langle \rangle$  s rovností? Uveďte zdůvodnění. (2b)
  - (c) Jsou teorie  $T$  a  $T'$  kompletní?. Uveďte zdůvodnění. (2b)
  - (d) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)