Zkouška VPL - písemná část

9. února 2016

1. Jsou dány dva výroky nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$:

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r), \\ \psi: &\quad (\neg s \vee \neg r) \wedge (\neg t \vee s) \wedge \neg p. \end{aligned}$$

   (a) Pomocí implikačního grafu rozhodněte, zda je výrok $\varphi \wedge \psi$ splnitelný. Pokud ano, nalezněte nějaké ohodnocení splňující $\varphi \wedge \psi$. *(2b)*
   (b) Tablo metodou určete množinu $M^{\mathbb{P}'}(\varphi)$ všech modelů φ nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$. *(2b)*
   (c) Kolik existuje neekvivalentních jednoduchých bezesporných extenzí teorie $\{\varphi\}$ nad $\mathbb{P}'$? Kolik z nich je kompletních? *(2b)*
   (d) Je teorie $\{\varphi, \psi\}$ nad $\mathbb{P}$ konzervativní extenzí teorie $\{\varphi\}$ nad $\mathbb{P}'$? Zdůvodněte. *(2b)*

2. V následujícím příkladu *synem/dcerou* člověka x rozumíme muže/ženu, jejímž rodičem je x, a *tetou z otcovy strany* člověka x rozumíme dceru otce otce x nebo matky otce x. Mějme následující tvrzení:

   (i) *Otec i matka každého člověka jsou jeho rodičové, přičemž otec je muž a matka je žena.*
   (ii) *Má-li žena syna, má i dceru.*

   Ukažte rezolucí, že pak:

   (iii) *Každý má tetu z otcovy strany.*

   Konkrétně:

   (a) Uvedená tvrzení vyjádřete <u>sentencemi</u> φ_1, φ_2, φ_3, jazyka $L = \langle R, M, Z, o, m\rangle$ bez rovnosti, kde R je binární relační symbol a $R(x, y)$ značí, že "x je rodičem y", M, Z jsou unární relační symboly a $M(x)$, $Z(x)$ značí, že "x je muž",resp. "x je žena", a o, m jsou unární funkční symboly a $o(x)$, $m(x)$ reprezentují "otce x", resp. "matku x". *(2b)*
   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí či jejich negací nalezněte otevřenou teorii T (případně v rozšířeném jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$. *(2b)*
   (c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. *(2b)*
   (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(4b)*
   (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T', která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (d). (2b)*

3. Nechť T je teorie jazyka $L = \langle f, g, a\rangle$ s rovností, kde f, g, a jsou (po řadě) binární, unární a nulární funkční symboly, s následujícími axiomy

$$\begin{aligned} f(x, f(y, z)) &= f(f(x, y), z), \\ f(a, x) = x \quad &\wedge \quad f(x, a) = x, \\ f(x, g(x)) = a \quad &\wedge \quad f(g(x), x) = a. \end{aligned}$$

   (a) Je $(\forall x)(\forall y) f(x, y) = f(y, x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T? Zdůvodněte. *(2b)*
   (b) Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle\{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0\rangle$ jazyka L, kde $+$, $-$ jsou standardní sčítání a (unární) mínus modulo 4. Je teorie $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Z}_4})$ jednoduchá extenze teorie T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (c) Nalezněte všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}$. Jsou všechny modelem teorie T? Zdůvodněte. *(2b)*
   (d) Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi. Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*