

Zkouška VPL - písemná část

11. února 2016

1. Nechť $T = \{p \rightarrow r \wedge q, (q \rightarrow r) \rightarrow \neg q\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
 - (a) Tablo metodou určete všechny modely teorie T . (3b)
 - (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. (2b)
 - (c) Je T extenzí teorie $S = \{\neg p \vee \neg q\}$ nad $\{p, q\}$? Je T konzervativní extenzí S ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Zjistěte, kolik je navzájem v T neekvivalentních výroků nad \mathbb{P} , které jsou v T nezávislé. Uveďte alespoň dva takové výroky. (2b)
2. Uvažme následující tvrzení o sledování lidí na síti:

- (i) Každý člověk je buď někým sledován anebo je odpojen (ale nikoli obojí zároveň).
- (ii) Je-li člověk odpojen, nikoho nesleduje.

Ukažte rezolucí, že pak:

- (iii) Každý, kdo někoho sleduje, je někým sledován.

Konkrétně:

- (a) Formalizujte tvrzení (i), (ii), (iii) po řadě jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ v jazyce $L = \langle S, O \rangle$ bez rovností, kde S je binární relační symbol, O je unární relační symbol a $S(x, y), O(x)$ značí po řadě, že “člověk x sleduje člověka y ” a “člověk x je odpojen”. (2b)
 - (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí či jejich negací nalezněte otevřenou teorii T (případně v rozšířeném jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$. (2b)
 - (c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní s T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. (2b)
 - (d) Rezolucí dokažte, že teorie T' není splnitelná. Rezoluční odvození znázorněte rezolučním stromem. V každém kroku uveďte použitou unifikaci. (3b)
 - (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T' , která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (d).* (2b)
3. Nechť $T = \{R(x, x), R(x, y) \rightarrow R(y, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle R \rangle$ s rovnostmi, kde R je binární relační symbol a axiom φ vyjadřuje, že “existují právě 3 prvky”.
 - (a) Určete izomorfní spektrum teorie T . (2b)
 - (b) Určete kolik má teorie T jednoduchých kompletních extenzí. Napište alespoň dvě z nich. (2b)
 - (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Nechť $T' = T \cup \{R(c_1, c_2)\}$ je teorie v jazyce $L = \langle R, c_1, c_2 \rangle$ s rovnostmi, kde c_1, c_2 jsou nové konstantní symboly. Je T' konzervativní extenze T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)