

Zkouška VPL - písemná část

17. února 2016

1. Kdo by se chtěl ucházet o ruku krásné Porcie, musí (rezolucí) zjistit, v které skříňce, zlaté, stříbrné, či olovené je ukryta její podobizna. Víme, že

- (i) Podobizna Porcie je v právě jedné skříňce.
- (ii) Alespoň jeden nápis na skříňkách je pravdivý.
- (iii) Alespoň jeden nápis na skříňkách je nepravdivý.
- (iv) Nápis na zlaté skříňce říká: “Podobizna není v této skříňce.”
- (v) Nápis na stříbrné skříňce říká: “Podobizna není v zlaté skříňce.”
- (vi) Nápis na olovené skříňce říká: “Podobizna je v této skříňce.”

Nechť prvovýroky z, s, o reprezentují (po řadě), že “podobizna je v zlaté / stříbrné / olovené skříňce” a prvovýroky p_z, p_s, p_o reprezentují (po řadě), že “nápis na zlaté / stříbrné / olovené skříňce je pravdivý.” Dále označme $\mathbb{P}' = \{z, s, o, p_z, p_s, p_o\}$.

- (a) Napište výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad \mathbb{P}' vyjadřující po řadě (i), (ii), (iii) a dále výroky (ve tvaru ekvivalence) $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ nad \mathbb{P}' reprezentující znalosti vyplývající (po řadě) z (iv), (v), (vi). (2b)
 - (b) Pomocí T' -ekvivalentních úprav (náhrada podformule za ekvivalentní formuli) nalezněte teorii T nad $\mathbb{P} = \{z, s, o\}$ takovou, že teorie $T' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$ nad \mathbb{P}' je konzervativní extenzí teorie T . (2b)
 - (c) Rezolucí z teorie T zjistěte, v které skříňce je ukryta podobizna Porcie. (4b)
 - (d) Je teorie T' nad \mathbb{P}' kompletní? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Nechť $T = \{(\exists y)(P(y) \rightarrow P(x))\}$ je teorie v jazyce $L = \langle P \rangle$ bez rovnosti, kde P je unární relační symbol.
- (a) Nalezněte otevřenou konzervativní extenzi T' teorie T v jazyce L' rozšířeném pouze o unární funkční symbol f . (2b)
 - (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie T' s položkou $F(\forall x)P(x)$ v kořeni. (3b)
 - (c) V tablu z předchozího bodu nalezněte bezespornou větev V a kanonický model \mathcal{A} z V takový, že $\mathcal{A} \models \neg P(x)$. (3b)
 - (d) Je formule $(\forall x)P(x)$ pravdivá, lživá, či nezávislá v T' ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle f \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol a axiom φ vyjadřuje, že “existují nejvýše 3 prvky”.
- (a) Určete izomorfní spektrum teorie T . (2b)
 - (b) Napište dvě navzájem neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T . (2b)
 - (c) Nechť $T' = \{f(x) = f(f(f(x))), \varphi\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T ? Je T extenze T' ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)