Zkouška VPL - písemná část

12. ledna 2017

1. Nechť $T = \{(\neg p \wedge r) \rightarrow \neg q,\ p \rightarrow \neg(q \rightarrow r),\ q \vee r\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
   (a) Tablo metodou určete všechny modely teorie T. *(3b)*
   (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Je T extenzí teorie $S = \{p \rightarrow q\}$ nad $\{p, q\}$? Je konzervativní extenzí? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (d) Zjistěte, kolik je navzájem (i) neekvivalentních, (ii) T-neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou lživé v T. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Víme, že:
   (i) Jack má psa.
   (ii) Každý, kdo má psa, je milovníkem zvířat.
   (iii) Žádný milovník zvířat nezabil žádné zvíře.
   (iv) Jack nebo zvědavost zabila Micku.
   (v) Micka je kočka.
   (vi) Kočky jsou zvířata.

   Ukažte rezolucí, že

   (vii) Zvědavost zabila nějakou kočku.

   (a) Nechť $\text{Mít}(x, y)$, $\text{Zab}(x, y)$ znamená, že "x má y" resp. "x zabil y", dále $\text{Pes}(x)$, $\text{Koč}(x)$, $\text{MiZv}(x)$, $\text{Zvíř}(x)$ znamená (po řadě), že "x je pes/kočka/milovník zvířat/zvíře". Uvedená tvrzení (i) až (vii) vyjádřete sentencemi φ_1 až φ_7 jazyka $\langle \text{Mít, Zab, Pes, Koč, MiZv, Zvíř, Jack, Micka} \rangle$ bez rovnosti. *(2b)*
   (b) Pomocí případné skolemizace a transformace předchozích sentencí či jejich negací do CNF nalezněte otevřenou teorii T axiomatizovanou klauzulemi, která je nesplnitelná právě když $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\} \models \varphi_7$. Napište T v množinové reprezentaci. *(2b)*
   (c) Rezolucí dokažte, že T není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(3b)*
   (d) Je T zamítnutelná LI-rezolucí? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (e) Označme $T' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$. Přidáme-li k teorii T' nový axiom vyjadřující
   A) "Jack má psa Alíka." (jazyka rozšířeného o nový konstantní symbol), anebo
   B) "Všichni psi jsou zvířata.",
   dostaneme konzervativní extenzi teorie T'? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť T je teorie v jazyce $L = \langle 0, -, |\,|, <, f, g \rangle$ s rovností, kde 0 je konstantní symbol, $|\,|$, f, g jsou unární funkční symboly, $-$ je binární funkční a $<$ je binární relační symbol, s axiomy
   $$\varphi_1: \quad (\forall u)(\forall \varepsilon)(0 < \varepsilon \rightarrow (\exists \delta)(0 < \delta \wedge (\forall x)(|x - u| < \delta \rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon))),$$
   $$\varphi_2: \quad (\exists u)(\exists \varepsilon)(0 < \varepsilon \wedge (\forall \delta)(0 < \delta \rightarrow (\exists x)(|x - u| < \delta \wedge \neg(|g(x) - g(u)| < \varepsilon)))).$$
   (a) Nalezněte formule φ_1', φ_2' v prenexním tvaru a ekvivalentní s φ_1 resp. φ_2. *(2b)*
   (b) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*
   (c) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, -, |\,|, <, \text{id}, \text{sgn} \rangle$, kde $0, -, |\,|, <$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$, $\text{id}(r) = r$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$ a $\text{sgn}(0) = 0$, $\text{sgn}(r) = |r|/r$ pro $r \neq 0$. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*
   (d) Uveďte příklady množiny definovatelné a množiny nedefinovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*