Zkouška VPL - písemná část

18. ledna 2017

1. Buď $n \geq 1$ přirozené číslo a $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ (množina vrcholů). Nechť prvovýrok e_{ij} reprezentuje, že *"mezi vrcholy i a j je hrana"* a $\mathbb{P} = \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Tedy libovolný graf $G = (V, E)$ chápeme též jako ohodnocení $v\colon \mathbb{P} \to \{0, 1\}$, v němž $v(e_{ij}) = 1$ právě když $(i, j) \in E$. Nechť dále T je kompletní teorie nad $\mathbb{P}$, která má za model *jednoduchý neorientovaný* graf.

   (a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{\bigwedge_{1\leq i\leq n} \neg e_{ii}, \bigwedge_{1\leq i,j\leq n} e_{ij} \leftrightarrow e_{ji}\}$? Je T konzervativní extenzí S? Odpovědi zdůvodněte. *(2b)*

   (b) Nechť prvovýroky a_i reprezentují, že vrchol i leží v nějaké množině A, tj. strukturu (V, E, A) ztotožňujeme s ohodnocením v prvovýroků $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \cup \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, v němž navíc $v(a_i) = 1$ právě když $i \in A$. Napište výrok φ nad $\mathbb{P}'$ vyjadřující, že *"A je pokrytí $G = (V, E)$"*. (Množina $A \subseteq V$ je *pokrytí* grafu $G = (V, E)$, obsahuje-li alespoň jeden vrchol od každé hrany.) *(2b)*

   (c) Nechť nyní $n = 4$ a $G = (V, E)$ je úplný bipartitní graf $K_{2,2}$ s bipartitními třídami $\{1, 2\}$ a $\{3, 4\}$. Zvolte si (vhodně) kompletní teorii T nad $\mathbb{P}$ tak, aby měla za model G, a převeďte $T' = T \cup \{\varphi\}$ do množinové reprezentace. *(2b)*

   (d) Rezolucí ukažte, že $T' \models (a_1 \wedge a_2) \vee (a_3 \wedge a_4)$, tj. každé pokrytí $K_{2,2}$ obsahuje alespoň jednu bipartitní třídu. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(4b)*

2. Nechť $T = \{(\exists x)(\neg P(x) \to Q(x)),\ (\exists x)(P(x) \to R(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, Q, R jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\exists x)(\neg R(x) \to Q(x))$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. *(4b)*

   (b) Z bezesporné větve předchozího tabla sestrojte model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí. *(2b)*

   (c) Je φ dokazatelná, vyvratitelná, nebo nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Má teorie T konzervativní kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ, který není otevřený:

$$x \neq 0 \ \to\ (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

   Víme, že racionální čísla se standardními operacemi tvoří těleso a

$$T \models 0 \cdot y = 0, \quad T \models\ (x \neq 0\ \wedge\ x \cdot y = 1\ \wedge\ x \cdot z = 1)\ \to\ y = z.$$

   (a) Je T otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte. *(2b)*

   (b) Napište Skolemovu variantu φ_S generálního uzávěru formule φ s novým funkčním symbolem f. Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S. Je $T' \models \varphi$? Zdůvodněte. *(2b)*

   (c) Nechť ψ je formule $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$. Napište extenzi T^* teorie T o definovaný funkční symbol f formulí ψ. *(2b)*

   (d) Je T^* ekvivalentní teorii T'? Zdůvodněte. *(2b)*