

Zkouška VPL - písemná část

21. ledna 2017

1. V parlamentu se projednávají tři návrhy: *zavedení školného, zvýšení daní, omezení kouření v restauracích.*

- (i) *Strana A trvá na tom, že když se vyhoví straně B nebo straně C, tak se nezavede školné nebo se nezvýší daně.*
- (ii) *Strana B chce, aby se omezilo kouření, pokud se nevyhoví straně C nebo se zvýší daně.*
- (iii) *Strana C požaduje, aby se v případě, že se vyhoví straně A, nezvyšovaly daně ani se neomezovalo kouření.*
- (iv) *V závěrečném hlasování byly splněny požadavky právě dvou stran.*

Nechť prvovýroky p, q, r reprezentují (po řadě) schválení návrhů na *zavedení školného, zvýšení daní, omezení kouření*, prvovýroky a, b, c reprezentují splnění požadavku jednotlivých stran a označme $\mathbb{P} = \{p, q, r, a, b, c\}$.

- (a) Napište výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ve tvaru ekvivalence a výrok φ_4 v CNF nad \mathbb{P} vyjadřující (po řadě) (i), (ii), (iii) a (iv). (2b)
 - (b) Pomocí T -ekvivalentních úprav (náhrada podformule za T -ekvivalentní formuli) nalezněte teorii T' nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ takovou, že $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ nad \mathbb{P} je konzervativní extenzí teorie T' . (2b)
 - (c) Převeďte teorii T' do množinové reprezentace (2b).
 - (d) Rezolucí ukažte, že $T' \models r$ (tedy bylo *schváleno omezení kouření*). Rezoluční odvození znázorněte rezolučním stromem. (4b)
2. Nechť $T = \{(\forall x)(\exists y)\neg P(x, y), (\exists x)R(x), (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, R je binární resp. unární relační symbol.
- (a) Skolemizací nalezněte k T ekvivalentní teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
 - (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nespílitelná. (4b)
 - (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* (2b)
 - (d) Je sentence $(\forall x)R(x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T' ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Nechť $T = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2), \neg(\exists x)(f(x) = x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle f \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.
- (a) Určete izomorfní spektrum $I(T, \kappa)$ teorie T pro spočetné κ (konečné i nekonečné). (2b)
 - (b) Je teorie T konzervativní extenzí teorie $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2)\}$ jazyka $L' = \langle \rangle$ s rovností? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (c) Jsou teorie T a T' kompletní?. Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)