

Zkouška VPL - písemná část

3. února 2017

1. Kdo by se chtěl ucházet o ruku krásné Porcie, musí (rezolucí) zjistit, v které skříňce, zlaté, stříbrné, či olovené je ukryta její podobizna. Víme, že

- (i) Podobizna Porcie je v právě jedné skříňce.
- (ii) Nejvýše jeden nápis na skříňkách je pravdivý.
- (iii) Nápis na zlaté skříňce říká: “Podobizna není v této skříňce.”
- (iv) Nápis na stříbrné skříňce říká: “Je-li nápis na zlaté skříňce pravdivý, podobizna je v olovené skříňce.”
- (v) Nápis na olovené skříňce říká: “Nápis na zlaté skříňce není pravdivý.”

Nechť prvovýroky z, s, o reprezentují (po řadě), že “podobizna je v zlaté / stříbrné / olovené skříňce” a prvovýroky p_z, p_s, p_o reprezentují (po řadě), že “nápis na zlaté / stříbrné / olovené skříňce je pravdivý.” Dále označme $\mathbb{P}' = \{z, s, o, p_z, p_s, p_o\}$.

- (a) Napište výroky φ_1, φ_2 nad \mathbb{P}' vyjadřující (i), (ii), a dále výroky (ve tvaru ekvivalence) $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ nad \mathbb{P}' reprezentující znalosti vyplývající (po řadě) z (iii), (iv), (v). (2b)
 - (b) Pomocí T' -ekvivalentních úprav (náhrada podformule za ekvivalentní formuli) nalezněte teorii T nad $\mathbb{P} = \{z, s, o\}$ takovou, že teorie $T' = \{\varphi_1, \dots, \varphi_5\}$ nad \mathbb{P}' je konzervativní extenzí teorie T . (2b)
 - (c) Rezolucí z teorie T zjistěte, ve které skříňce je ukryta podobizna Porcie. (4b)
 - (d) Je teorie T' nad \mathbb{P}' kompletní? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Nechť $T = \{(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x, y)), (\exists y)((\exists x)R(y, x) \rightarrow \neg(\forall z)P(z)), (\forall x)P(x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, R je unární resp. binární relační symbol.
- (a) Skolemizací nalezněte k T ekvivalentní teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
 - (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nespílitelná. (4b)
 - (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* (2b)
 - (d) Napište nějakou kompletní extenzi teorie T nebo zdůvodněte, proč žádná neexistuje. (2b)
3. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle f \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol a axiom φ vyjadřuje, že “existují nejvýše 3 prvky”.
- (a) Určete izomorfní spektrum teorie T . (2b)
 - (b) Napište dvě navzájem neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T . (2b)
 - (c) Nechť $T' = \{f(x) = f(f(f(x))), \varphi\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T ? Je T extenze T' ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)