Zkouška VPL - písemná část

10. února 2017

1. Nechť $T = \{(\neg p \rightarrow q) \rightarrow q,\ r \rightarrow \neg p \wedge \neg q\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
   (a) Tablo metodou nalezněte všechny modely teorie T. *(3b)*
   (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Je teorie T extenzí teorie $S = \{p \rightarrow q\}$ nad $\{p, q\}$? Je T konzervativní extenzí S? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (d) Zjistěte, kolik je navzájem neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou nezávislé v T. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Jsou dána následující tvrzení o proběhlém genetickém experimentu:
   (i) Každá ovce byla buď porozena jinou ovcí, nebo byla naklonována (avšak nikoli oboje zároveň).
   (ii) Žádná naklonovaná ovce neporodila.

   Ukažte rezolucí, že pak:

   (iii) Pokud ovce porodila, byla sama porozena.

   Konkrétně:

   (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi φ_1, φ_2, φ_3 v jazyce $L = \langle P, K \rangle$ bez rovnosti, kde P je binární relační symbol, K je unární relační symbol a $P(x, y)$, $K(x)$ značí, že *"ovce x porodila ovci y"* a *"ovce x byla naklonována"*. *(2b)*
   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi_3$. *(2b)*
   (c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. *(2b)*
   (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí tři rezoluční kroky. (3b)*
   (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T', která je nesplnitelná. *(2b)*

3. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S \rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.
   (a) Buď $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S \rangle$, kde $S(r) = r + 1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Právě pro která $r \in \mathbb{R}$ je množina $\{r\}$ definovatelná v $\mathcal{R}$ z parametru 0? *(2b)*
   (b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (c) Je extenze T' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω-kategorická teorie? Je T' kompletní? *(2b)*
   (d) Pro která $0 < n \in \mathbb{N}$ existuje L-struktura $\mathcal{B}$ velikosti n elementárně ekvivalentní s $\mathcal{R}$? Existuje spočetná struktura $\mathcal{B}$ elementárně ekvivaletní s $\mathcal{R}$? Zdůvodněte. *(2b)*