

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 1

4. října 2017

- Mějme konečnou hru dvou (střídajících se) hráčů. Hra končí po n kotech výhrou jednoho z hráčů označených X, Y , přičemž X začíná. Hra je zadána formulí $\varphi(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ vyjadřující, že ve hře s tahy $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ vyhrává X . Pomocí kvantifikátorů sestrojte formuli vyjadřující
 - “ X nemůže prohrát”, “ Y nemůže prohrát”,
 - “ X má vyhrávací strategii”,
 - “ Y má vyhrávací strategii”.
- Je dán (neorientovaný) graf G a dva jeho vrcholy u, v . Sestrojte výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když
 - G je bipartitní,
 - G má perfektní párování,
 - v G existuje cesta mezi u a v .
- Sestrojte formule 1. řádu (v jazyce teorie grafů) vyjadřující
 - “ u a v mají alespoň jednoho společného souseda”,
 - “existují tři navzájem nezávislé hrany”,
 - “existuje cesta mezi u a v délky n ”, kde $n > 0$ je předem dané.
- Sestrojte formule 2. řádu (v jazyce teorie grafů) vyjadřující
 - “existuje bipartitní rozklad”,
 - “existuje perfektní párování”,
 - “existuje cesta mezi u a v ”.
- Sestrojte formule 1. řádu (s relačním symbolem \leq) vyjadřující
 - “ x je nejmenší prvek”, “ x je minimální prvek”,
 - “ x má bezprostředního následníka”,
 - “každé dva prvky mají nejmenšího společného předchůdce”.
- Pomocí rovnosti nalezněte formule 1.řádu vyjadřující pro předem dané $n > 0$
 - “existuje alespoň n prvků”,
 - “existuje nejvýše n prvků”,
 - “existuje právě n prvků”

Lze pomocí jedné či vícero formulí vyjádřit “existuje nekonečně mnoho prvků”?
- Sestrojte formuli 2. řádu vyjadřující “existuje konečně mnoho prvků”. Návod:
 - Sestrojte formule 1. řádu (s funkčním symbolem f) vyjadřující “ f je prostá”, “ f je na”.
 - Sestrojte formuli 2. řádu vyjadřující “každá funkce, která je na, je prostá”.
- (DŮ) Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n (pokud možno v CNF) pro $n = 8$, která je splnitelná, právě když to lze.