

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 11

20. prosince 2017

1. Ukažte, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, např. ověřte

$$(a) \models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$(b) \not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$$

2. Nechť T' je rozšíření teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ pomocí axiomů

$$-x = y \leftrightarrow x + y = 0$$

$$x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y)$$

Nalezněte formule původního jazyka L ekvivalentní v T' následujícím formulím.

$$(a) x + (-x) = 0$$

$$(b) x + (-y) < x$$

$$(c) -(x + y) < -x$$

3. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ , který není otevřený:

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$.

(a) Nalezněte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f .

(b) Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S . Je $T' \models \varphi$?

(c) Lze každý model teorie T jednoznačně expandovat na model teorie T' ?

4. (Předchozí DÚ, včetně 3a) Nechť T je předchozí teorie. Označme ψ formuli $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

(a) Platí v T podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli $\psi(x, y)$ a proměnnou y ?

(b) Sestrojte extenzi T^* teorie T o definovaný symbol f formulí ψ .

(c) Je T^* ekvivalentní teorii T' z přechodního příkladu?

(d) K následující formuli nalezněte v T^* ekvivalentní formuli původního jazyka L .

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

5. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.

(a) $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.

(b) $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.

6. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejsplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konstantní symboly a, b .

$$(a) T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$$

$$(b) T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$$

$$(c) T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$$

$$(d) T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$$

7. Převeďte následující formule na ekvivalentní formule v množinové reprezentaci.

- (a) $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
- (c) $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$
- (d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

8. Pomocí unifikačního algoritmu nalezněte nejobecnější unifikace následujících množin výrazů nebo ukažte, nejsou unifikovatelné.

- (a) $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
- (b) $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
- (c) $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
- (d) $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

9. Řekneme, že výraz E_1 je *variantou* výrazu E_2 , pokud existují substituce σ a τ takové, že $E_1 = E_2\sigma$ a $E_2 = E_1\tau$. Dokažte, že je-li E_1 variantou E_2 , pak se liší jen přejmenováním proměnných.

10. Nalezněte (všechny) rezolventy následujících klauzulí.

- (a) $\{P(x, y), P(y, z)\}, \{\neg P(u, f(u))\}$
- (b) $\{P(x, x), \neg R(x, f(x))\}, \{R(x, y), Q(y, z)\}$
- (c) $\{P(x, y), \neg P(x, x), Q(x, f(x), z)\}, \{\neg Q(f(x), x, z), P(x, z)\}$

11. Ukažte, že následující množina klauzulí je rezolucí zamítnutelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého rezolučního kroku napište použitou substituci a označte rezolvované literály.

- (a) $\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y, z)\}$
- (b) $\{\neg Q(h(b), w), H(w, a)\}$
- (c) $\{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x, a)\}$
- (d) $\{P(a, u, f(h(u))), H(u, a), Q(h(b), b)\}$
- (e) $\{\neg H(v, a)\}$

12. Víme, že

- (a) Pokud je cihla na jiné cihle, tak není na zemi.
- (b) Každá cihla je buď na zemi nebo na jiné cihle.
- (c) Žádná cihla není na cihle, která je na další cihle.

Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že když je cihla na jiné cihle, ta spodní je na zemi.

13. Víme, že

- (a) Každý holič holí každého, kdo se neholí sám.
- (b) Žádný holič neholí někoho, kdo se holí sám.

Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že žádný holič neexistuje.

Poznámka

DÚ: příklad 12) nebo 13) (toto je poslední DÚ). Druhý test se bude psát na posledním cvičení 10.1.