

## Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 13

10. ledna 2018

1. Uvažme struktury  $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$  se standardními uspořádáními.
  - (a) Jsou navzájem elementárně neekvivalentní?
  - (b) Jsou navzájem neizomorfní?
  - (c) Určete kolik automorfismů tyto struktury mají.
2. Mějme jazyk  $L = \langle U \rangle$  s rovností, kde  $U$  je unární relační symbol.
  - (a) Pro dané  $n \in \mathbb{N}^+$  vyjádřete "U(x) platí právě pro n prvků x" formulí  $\varphi$ .
  - (b) Je teorie  $T = \{\varphi\}$  kompletní?
  - (c) Je  $T$   $\omega$ -kategorická?
  - (d) Určete izomorfní spektrum teorie  $T$  (stačí pro nejvýše spočetné kardinality).
  - (e) Nalezněte nějakou jednoduchou kompletní extenzi teorie  $T$ .
  - (f) Určete všechny navzájem neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie  $T$ .
3. Nechť  $T$  je extenze teorie  $DeLO$  (tj. hustých lineárních uspořádání bez konců) o nový konstantní symbol  $c$  (a žádné axiomy navíc).
  - (a) Je  $T$   $\omega$ -kategorická?
  - (b) Je  $T$  kompletní?
  - (c) Platí totéž pokud místo  $DeLO$  vezmeme teorii  $DeLO^+$  (hustá lineární uspořádání s maximálním prvkem a bez minimálního prvku)?
4. Nechť  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, abs^{\mathbb{R}} \rangle$  je struktura jazyka  $L = \langle abs \rangle$ , kde  $abs$  je unární funkční symbol,  $\mathbb{R}$  jsou reálná čísla a  $abs^{\mathbb{R}}$  je absolutní hodnota v  $\mathbb{R}$ .
  - (a) Ukažte, že množiny  $\{0\}$ ,  $(0, +\infty)$ ,  $(-\infty, 0)$  jsou definovatelné v  $\mathcal{A}$  bez parametrů.
  - (b) Ukažte, že množiny  $\{1\}$ ,  $\{-1, 1\}$ ,  $(1, 2)$  nejsou definovatelné v  $\mathcal{A}$  bez parametrů.
  - (c) Určete všechny automorfismy  $\mathcal{A}$ .
  - (d) Určete  $Df^1(\mathcal{A}, \emptyset)$ , tj. všechny definovatelné množiny v  $\mathcal{A}$  bez parametrů.
5. Nechť  $K$  je třída nekonečných grup.
  - (a) Je  $K$  axiomatizovatelná?
  - (b) Je  $K$  konečně axiomatizovatelná?
  - (c) Je  $K$  otevřeně axiomatizovatelná?
6. Nechť  $\underline{n}$  pro  $n \in \mathbb{N}$  označuje  $n$ -tý numerál. Dokažte v Robinsonově aritmetice  $Q$ , že pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$ 
  - (a)  $Q \vdash \underline{m} = 0$ , právě když  $m = 0$ ,
  - (b)  $Q \vdash \underline{m} + \underline{n} = \underline{m+n}$ ,
  - (c)  $Q \vdash \underline{m} \leq \underline{n}$ , právě když  $m \leq n$ .
7. Dokažte v Peanově aritmetice  $PA$ 
  - (a)  $PA \vdash S(x) + y = S(x+y)$ ,
  - (b)  $PA \vdash 0 + x = x + 0$ ,
  - (c)  $PA \vdash x + y = y + x$ .