Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 2

11. října 2017

1. (předchozí DÚ) Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n (pokud možno v CNF) pro $n = 8$, která je splnitelná, právě když to lze.

2. Opakování základních pojmů z přednášky na konkrétních příkladech podle potřeby.
   (a) Ukažte, že v každém stromě T (dle definice z přednášky) pro každé prvky x, y s $x <_T y$ *mezi* x a y existuje bezprostřední následník x (syn).
   (b) Nalezněte příklad stromu, ve kterém nějaký prvek (mimo kořene) nemá bezprostředního předka (otce).
   (c) Ukažte, že každý konečně větvící se strom, ve kterém má každý prvek (mimo kořene) otce, je nejvýše spočetný.

3. Dokažte či vyvraťte, že následující množiny logických spojek jsou univerzální.
   (a) $\{\downarrow\}$, kde $\downarrow$ je Peirceova spojka (NOR)
   (b) $\{\uparrow\}$, kde $\uparrow$ je Shefferova spojka (NAND)
   (c) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

4. Převeďte následující výroky do DNF a CNF a) tabulkou (určením modelů), b) ekvivalentními úpravami.
   (a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$
   (b) $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$
   (c) $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$

5. (DÚ) Ukažte, že pro spočetně nekonečnou množinu prvovýroků $\mathbb{P}$ neplatí, že každou $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ lze *namodelovat* výrokem v CNF i výrokem v DNF.

6. Dokažte následující tvrzení (z přednášky): *Nechť výrok φ obsahuje pouze spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Pak pro výrok φ^* vzniklý z φ záměnou $\wedge$ a $\vee$ a znegováním všech literálů platí, že $\neg\varphi \sim \varphi^*$.*

7. Nalezněte DNF i CNF reprezentaci Booleovské funkce $\mathrm{maj}\colon {}^{3}2 \rightarrow 2$, definovanou jako převládající hodnota ze tří (tj. majorita).

8. Nechť $\mathrm{maj}_n\colon {}^{3}({}^{n}2) \rightarrow {}^{n}2$ je funkce majority po složkách, tj. např

$$\mathrm{maj}_4((0,1,0,1),(1,1,0,0),(1,1,0,0)) = (1,1,0,0)$$

   Řekneme, že množina $K \subseteq {}^{n}2$ je *mediánová*, je-li uzavřená na funkci maj_n.
   (a) Dokažte, že pro každý výrok φ v 2-CNF je $M(\varphi)$ mediánová množina.
   (b) (DÚ navíc, do konce semestru) Dokažte, že je-li $K \subseteq {}^{n}2$ mediánová množina, existuje výrok φ v 2-CNF o n proměnných takový, že $M(\varphi) = K$.