Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 3

28. října 2017

1. (předchozí DÚ) Ukažte, že pro spočetně nekonečnou množinu prvovýroků $\mathbb{P}$ neplatí, že každou $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ lze *namodelovat* výrokem v CNF i výrokem v DNF.

2. Ukažte, že nad spočetně nekonečnou množinu prvovýroků $\mathbb{P}$ existuje $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$, která se nedá *axiomatizovat* ani nekonečnou teorií T.

3. Pomocí implikačního grafu zjistěte, zda je následující výrok v 2-CNF splnitelný, popř. nalezněte splňující ohodnocení.

$$(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge$$
$$(p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1$$

4. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný, popř. nalezněte splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$
$$(\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_4 \vee p_5)$$

5. Uvažme teorii $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q),\ \neg p \rightarrow q,\ r \rightarrow q\}$. Které výroky jsou pravdivé / lživé / nezávislé / splnitelné / ekvivalentní v T?
   (a) p, q, r, s
   (b) $p \vee q$, $p \vee r$, $p \vee s$, $q \vee s$
   (c) $p \wedge q$, $q \wedge s$, $p \rightarrow q$, $s \rightarrow q$

6. Uvažme teorii $T = \{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad var(T).
   (a) Které výroky ve tvaru $p_i \rightarrow p_j$ jsou důsledkem T?
   (b) Které výroky tvaru $p_i \rightarrow (p_j \vee q_j)$ jsou důsledkem T?
   (c) Určete všechny modely teorie T.

7. Dokažte či vyvraťte (popř. uveďte správný vztah), že pro libovolnou teorii T a výroky φ, ψ nad $\mathbb{P}$ platí
   (a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg\varphi$
   (b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$
   (c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$
   (d) $T \models \varphi \rightarrow \psi$ a $T \models \psi \rightarrow \chi$, právě když $T \models \varphi \rightarrow \chi$

8. Dokažte anebo vyvraťte následující tvrzení, popř. uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie T a S nad $\mathbb{P}$ platí
   (a) $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$
   (b) $\theta^{\mathbb{P}}(S \cup T) = \theta^{\mathbb{P}}(S) \cup \theta^{\mathbb{P}}(T)$
   (c) $\theta^{\mathbb{P}}(S \cap T) = \theta^{\mathbb{P}}(S) \cap \theta^{\mathbb{P}}(T)$

9. (DÚ, libovolné tři podúlohy) Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathcal{P}}$ s $|M(\varphi)| = m$.
   (a) Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?
   (b) V kolika neekvivalentních teoriích nad $\mathbb{P}$ platí φ? V kolika neekvivalentních *kompletních* teoriích nad $\mathbb{P}$ platí φ?
   (c) Kolik je neekvivalentních teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?
   (d) Nechť navíc $\{\varphi, \psi\}$ je sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků χ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?