Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 8

29. listopadu 2017

1. Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0,1,2,3\}, +, -, 0\rangle$, kde binární funkce $+$ je sčítání modulo 4 a unární $-$ je funkce *inverzního* prvku vůči $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.
   (a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
   (b) Určete generované podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a\rangle$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}_4$.
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ i jiné podstruktury?
   (d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?
   (e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Z}_4}$?
   (f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy komutativní grupou?

2. Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi (tvoří *těleso*).
   (a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?
   (b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ expandovat na model teorie grup?
   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Q}}$?
   (d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

3. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ s rovností.
   (a) Je T (sémanticky) bezesporná?
   (b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T (sémanticky) kompletní?
   (c) Určete všechny její jednoduché kompletní extenze (až na ekvivalenci).
   (d) Je teorie $T' = \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchou extenzí? Je T' konzervativní extenzí? Je teorie $T^* = T \cup T'$ konzervativní extenzí teorie T?

4. (předchozí DÚ) Nechť $L = \langle F\rangle$ je jazyk s rovností, kde F je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:
   (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,
   (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,
   (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup\rangle$.

5. (DÚ) Víme, že
   (a) všichni vinni lžou,
   (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
   (c) svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.