Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 9

6. prosince 2017

1. Uvažme níže uvedenou filmovou databázi jako relační strukturu $\mathcal{D} = \langle D, Filmy, Program, c^D \rangle_{c \in D}$ jazyka $L = \langle F, P, c \rangle_{c \in D}$ s rovností, kde $D = \{$'Po strništi bos', 'J. Tříska', 'Mat', '13:15', $\ldots\}$ a $c^D = c$ pro každé $c \in D$. Napište formule definující v $\mathcal{D}$ tabulku
   (a) filmů, ve kterých hraje jejich režisér,
   (b) kin a časů, kdy je možné shlédnout film, ve kterém hraje jeho režisér,
   (c) režisérů, kteří hrají ve filmech promítaných v kinu Mat,
   (d) herců či režisérů, jejichž film se nikde nepromítá.

Filmy	*název*	*režisér*	*herec*
	Lidé z Maringotek	M. Frič	J. Tříska
	Po strništi bos	J. Svěrák	Z. Svěrák
	Po strništi bos	J. Svěrák	J. Tříska
	...	...	...

Program	*kino*	*název*	*čas*
	Světozor	Po strništi bos	13:15
	Mat	Po strništi bos	16:15
	Mat	Lidé z Maringotek	18:30
	...	...	...

2. (Předchozí DÚ) Víme, že
   (a) všichni vinni lžou,
   (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
   (c) svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

3. Označme $L(x, y)$ predikát *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ predikát *"existuje spojení z x do y"*. Víme, že
   (a) z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku do Paříže,
   (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
   (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

   Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže.

4. Nechť φ, ψ jsou sentence nebo jsou ve volné proměnné x, značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Nalezněte tablo důkazy následujících formulí.
   (a) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
   (b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
   (c) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (d) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \rightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (e) $(\exists x)(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (f) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \rightarrow (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (g) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$,
   (h) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$,
   (i) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$, kde x není volná ve ψ,
   (j) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$, kde x není volná ve ψ.

5. Nechť φ, ψ jsou ve volných proměnných x, y, z a w je proměnná nevyskytující se ve φ, ψ. Nalezněte tablo důkazy (uzávěrů) následujících formulí.

   (a) $(\forall x)(\exists y)\neg(\forall z)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)\neg\varphi$,

   (b) $(\exists x)(\forall y)((\forall z)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall w)(\varphi(z/w) \vee \psi)$,

   (c) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \vee (\exists z)\psi) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists w)(\varphi \vee \psi(z/w))$,

   (d) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \rightarrow (\forall z)\psi) \rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall w)(\varphi \rightarrow \psi(z/w))$.

6. Nechť T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že

   (a) $T^* \models x = y \ \rightarrow \ y = x$ (symetrie $=$)

   (b) $T^* \models (x = y \ \wedge \ y = z) \ \rightarrow \ x = z$ (tranzitivita $=$)

   Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (*iii*) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

7. Dokažte větu o konstantách syntakticky pomocí transformací tabel.

   Věta 1. *Nechť φ je formule jazyka L ve volných proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a T je teorie jazyka L. Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a T' teorii T nad L'. Pak*

   $$T \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\varphi \quad \textit{právě když} \quad T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n).$$

8. Dokažte větu o dedukci pomocí transformací tabel.

   Věta 2. *Pro každou teorii T (v uzavřeném tvaru) a sentence φ, ψ,*

   $$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \textit{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi.$$

9. Nechť L je jazyk obsahující binární relační symbol E a konstantní symboly a, b a T je teorie, jež má za model každý (neorientovaný) graf, v němž jsou vrcholy a a b ve stejné komponentě souvislosti. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má i model, ve kterém jsou vrcholy a, b v různých komponentách souvislosti.

   (Tento příklad ukazuje, že pojem *souvislosti v grafu* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

10. Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v A existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

    $$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

    (Tento příklad ukazuje, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

Domácí úkol

DÚ1: příklad 6., za 0.5b (vzhledem k nápovědě), DÚ2: příklad 9. nebo 10., za 1b.