Zkouška VPL - písemná část

9. ledna 2018

1. Na křižovatku tří silnic přijela zároveň tři (robotická) auta, z každé silnice jedno auto. Auta chtějí křižovatkou projet v daném směru, t.j. doleva či doprava od směru odkud přijela, a řídí se přitom jednoduchým pravidlem:

   (i) *Chceš-li jet doleva, a auto zprava chce zahnout doprava nebo auto zleva chce zahnout doleva, tak stůj, jinak jeď.*

   Rezolucí chceme dokázat, že

   (ii) *Pokud aspoň jedno auto jede, nějaké auto chce zahnout doprava.*

   Nechť prvovýroky l_i a s_i pro $i = 1, 2, 3$ označují, že *"i-té auto chce zahnout doleva"* a *"i-té auto stojí"*. Označme $\mathbb{P} = \{l_i, s_i \mid i = 1, 2, 3\}$.

   (a) Pro každé auto napište výrok nad $\mathbb{P}$ ve tvaru ekvivalence vyjadřující, že se řídí pravidlem (i). Nechť T je teorie nad $\mathbb{P}$, jež má za axiomy tyto výroky. Dále napište výrok φ nad $\mathbb{P}$ vyjadřující tvrzení (ii). *(2b)*

   (b) Pomocí převodu axiomů teorie T a výroku φ či jejich negací na CNF napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T \models \varphi$. *(2b)*

   (c) Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(3b)*

   (d) Je S zamítnutelná LI-rezolucí? Uveďte zdůvodnění. *(1b)*

   (e) Zjistěte, kolik má teorie T modelů. (*Není nutné modely určit.*) Zjistěte, kolik je navzájem neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, resp. nad $\mathbb{P}' = \{l_1, l_2, l_3\}$, které jsou nezávislé v teorii T. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\exists x)(P(x) \to Q(x)),\ (\forall x)(R(x) \wedge \neg Q(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, Q, R jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\forall x)(\neg P(x) \wedge R(x))$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. *(4b)*

   (b) Z bezesporné větve předchozího tabla sestrojte model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí. *(2b)*

   (c) Je φ dokazatelná, vyvratitelná, nebo nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Má teorie T konzervativní kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť T je teorie v jazyce $L = \langle 0, -, |\ |, <, f, g\rangle$ s rovností, kde 0 je konstantní symbol, $|\ |, f, g$ jsou unární funkční symboly, $-$ je binární funkční a $<$ je binární relační symbol, s axiomy

$$\varphi_1 : \quad (\forall u)(\forall \varepsilon)(0 < \varepsilon \to (\exists \delta)(0 < \delta \wedge (\forall x)(|x - u| < \delta \to |f(x) - f(u)| < \varepsilon))),$$
$$\varphi_2 : \quad (\exists u)(\exists \varepsilon)(0 < \varepsilon \wedge (\forall \delta)(0 < \delta \to (\exists x)(|x - u| < \delta \wedge \neg(|g(x) - g(u)| < \varepsilon)))).$$

   (a) Nalezněte formule φ_1', φ_2' v prenexním tvaru a ekvivalentní s φ_1 resp. φ_2. *(2b)*

   (b) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*

   (c) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, -, |\ |, <, \mathrm{id}, \mathrm{sgn}\rangle$, kde $0, -, |\ |, <$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$, $\mathrm{id}(r) = r$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{sgn}(0) = 0$, $\mathrm{sgn}(r) = |r|/r$ pro $r \neq 0$. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*

   (d) Uveďte příklady množiny definovatelné a množiny nedefinovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*