## Zkouška VPL - písemná část

23. ledna 2018

1. Na každém políčku mřížky 3x3 může být jáma nebo vánek (anebo ani jedno). Víme, že platí:

   ($i$) žádné dvě jámy nejsou na sousedních políčcích,

   ($ii$) pro každé políčko platí, že je na něm vánek, právě když někde na sousedních je jáma,

   ($iii$) na políčcích [1,2] a [2,2] je vánek, na políčcích [1,1] a [2,1] vánek není.

   Označme $E = \{\{[i,j],[i',j']\} \mid [i,j] \text{ a } [i',j'] \text{ jsou sousední políčka}\}$, přičemž sousední se myslí horizontálně či vertikálně (nikoliv diagonálně). Nechť $\mathbb{P} = \{j_{ij}, v_{i,j} \mid 1 \leq i,j \leq 3\}$ je množina prvovýroků, kde $j_{ij}$ a $v_{ij}$ reprezentují, že *"na políčku $[i,j]$ je jáma (resp. vánek)"*.

   (a) Napište výrok $\varphi_e$ pro $e = \{[i,j],[i',j']\} \in E$ vyjadřující, že "na sousedních políčcích $[i,j]$, $[i',j']$ nejsou dvě jámy", výrok $\psi_{ij}$ vyjadřující, že "na políčku $[i,j]$ je vánek, právě když někde na sousedních políčcích je jáma" (stačí příklad pro rohové políčko $[1,1]$, krajní (nerohové) políčko $[1,2]$ a vnitřní políčko $[2,2]$) a dále napište výrok $\chi$ vyjadřující ($iii$), vše nad množinou prvovýroků $\mathbb{P}$. Pomocí těchto výroků sestrojte teorii $T$ vyjadřující ($i$), ($ii$), ($iii$). *(2b)*

   (b) Převeďte $T$ do množinové reprezentace (namísto obecného výroku $\psi_{ij}$ stačí příklad pro $\psi_{11}$, $\psi_{12}$ a $\psi_{22}$). *(2b)*

   (c) Ukažte, že $T \vdash_R \neg j_{33}$, tj. "na políčku $[3,3]$ není jáma". Odvození znázorněte rezolučním stromem. *Nápověda: nejprve si uvědomte, jak to vyplývá z toho, co víme. (4b)*

   (d) Je $T$ rezolucí zamítnutelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\forall x)\neg P(x,x), (\exists x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x)), (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \wedge P(y,x) \to P(x,x)), (\forall x)(\exists y)P(x,y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P \rangle$ bez rovnosti, kde $P$ je binární relační symbol.

   (a) Skolemizací nalezněte k $T$ ekvisplnitelnou teorii $T'$ (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. *(2b)*

   (b) Tablo metodou dokažte, že $T'$ je nesplnitelná. *(4b)*

   (c) Nechť $T''$ je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie $T'$. Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů $T''$, která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b). (2b)*

   (d) Je teorie $T$ kompletní? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť $T$ je teorie jazyka $L = \langle f, g, a \rangle$ s rovností, kde $f$, $g$, $a$ jsou (po řadě) binární, unární a nulární funkční symboly, s následujícími axiomy

$$\begin{aligned} f(x, f(y,z)) &= f(f(x,y),z), \\ f(a,x) = x \quad &\wedge \quad f(x,a) = x, \\ f(x,g(x)) = a \quad &\wedge \quad f(g(x),x) = a. \end{aligned}$$

   (a) Je $(\forall x)(\forall y) f(x,y) = f(y,x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v $T$? Zdůvodněte. *(2b)*

   (b) Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}}_4 = \langle \{0,1,2,3\}, +, -, 0 \rangle$ jazyka $L$, kde $+$, $-$ jsou standardní sčítání a (unární) mínus modulo 4. Je teorie $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Z}}_4)$, tj. teorie struktury $\underline{\mathbb{Z}}_4$, jednoduchá extenze teorie $T$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (c) Nalezněte všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}}_4$. Jsou všechny modelem teorie $T$? Zdůvodněte. *(2b)*

   (d) Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi. Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem $T$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*