

Zkouška VPL - písemná část

25. ledna 2018

1. V prezidentských volbách kandidují pan A a pan B.

- (i) Pan A říká: "Budu zvolen nebo pan B lže."
- (ii) Pan B říká: "Pan A nebude zvolen nebo lžu."
- (iii) Bude zvolen právě jeden kandidát.

Nechť prvovýroky z_A, z_B reprezentují, že *bude zvolen pan A (resp. pan B)* a p_A, p_B reprezentují, že *pan A (resp. pan B) mluví pravdu*. Označme $\mathbb{P} = \{z_A, z_B, p_A, p_B\}$.

- (a) Napište výroky φ_1, φ_2 ve tvaru ekvivalence a výrok φ_3 v CNF vyjadřující (po řadě) (i), (ii), (iii), vše nad množinou prvovýroků \mathbb{P} . (2b)
- (b) Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Tablo metodou dokažte, že $T \models z_B$. (4b)
- (c) Uveďte příklad výroku nad \mathbb{P} , který je v teorii T nezávislý, anebo zdůvodněte, že takový výrok neexistuje. (2b)
- (d) Nalezněte teorii S nad $\{z_A, z_B\}$ takovou, že T je konzervativní extenze S . (2b)

2. Nechť T je teorie v jazyce $L = \langle <, f, g \rangle$ s rovností, kde f, g jsou unární funkční symboly a $<$ je binární relační symbol, s axiomy

$$\begin{aligned}\varphi_1 : & (\forall u)(\exists v)(\forall x)(v < x \rightarrow u < f(x)), \\ \varphi_2 : & (\exists u)(\forall v)(\exists x)(v < x \wedge \neg(u < g(x))).\end{aligned}$$

- (a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvivalentní s T . (2b)
- (b) Bud' $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <, \text{id}, \text{tg}' \rangle$, kde $<$ má svůj obvyklý význam na \mathbb{R} , $\text{id}(r) = r$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$, $\text{tg}'(k\pi/2) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a $\text{tg}'(r) = \text{tg}(r)$ (tg je funkce tangens) pro $r \neq k\pi/2$ s $k \in \mathbb{Z}$. Nalezněte expanzi \mathcal{A}' struktury \mathcal{A} takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. (2b)
- (c) Rezolucí ukažte, že $T^* = T' \cup \{f(x) = g(x)\}$ je nesplnitelná teorie. Namísto axiomů rovnosti pro jazyk L' můžete použít (*slabší*) axiom

$$x_2 = y_2 \rightarrow (x < x_2 \rightarrow x < y_2).$$

Ná pověda: V tom případě stačí čtyři rezoluční kroky. (4b)

- (d) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T^* (včetně axiomů rovnosti nebo výše uvedeného (slabšího) axiomu), která je nesplnitelná. *Ná pověda:* využijte unifikace v rezoluci z (c). (2b)

3. Nechť $T = \{c_1 \neq c_2, (\exists x)(x \neq c_3), \varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností, kde c_1, c_2, c_3 jsou konstantní symboly a axiom φ vyjadřuje "Existují nejvýše 4 prvky."

- (a) Je formule $c_1 = c_3$ pravdivá / lživá / nezávislá v T ? (2b)
- (b) Určete izomorfní spektrum teorie T . (2b)
- (c) Nalezněte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T nebo zdůvodněte, proč neexistují. (2b)
- (d) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)