Zkouška VPL - písemná část

31. ledna 2018

1. Nechť $T = \{\neg p \to q,\ \neg q \to \neg r,\ \neg p \to r,\ \neg r\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
   (a) Pomocí implikačního grafu ukažte, že T je splnitelná. *(2b)*
   (b) Určete všechny modely teorie T a axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Tablo metodou dokažte, že $T \models r \leftrightarrow \neg p$. *(3b)*
   (d) Zjistěte, kolik je navzájem
      (i) neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou nezávislé v T,
      (ii) T-neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou nezávislé v T.
      Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Jsou dána následující tvrzení:
   (i) Mary má králíka a John má psa.
   (ii) Každy pes honí nějakého králíka.
   (iii) Ten, kdo má králíka, nesnáší vše, co honí nějakého králíka.
   (iv) Když někdo něco nesnáší, nesnáší i toho, kdo to vlastní.

   Ukažte rezolucí, že pak:

   (v) Mary nesnáší Johna.

   Konkrétně:

   (a) Tvrzení (i) až (v) vyjádřete <u>sentencemi</u> φ_1 až φ_5 jazyka $L = \langle Ma, Honi, Nesnasi, Kralik, Pes, Mary, John\rangle$ bez rovnosti, kde Ma, $Honi$, $Nesnasi$ jsou binární relační symboly a $Ma(x, y)$, $Honi(x, y)$, $Nesnasi(x, y)$ značí, že "x má y", "x honí y", resp. "x nesnáší y", $Kralik$ a Pes jsou unární relační symboly a $Kralik(x)$, $Pes(x)$ značí, že "x je králík" resp. "x je pes", $Mary$ a $John$ jsou konstantní symboly označující Mary, resp. Johna. *(2b)*
   (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$. *(2b)*
   (c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. *(2b)*
   (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *(3b)*
   (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů teorie T', která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte unifikace v rezoluci z (d). (2b).*

3. Nechť $T = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2),\ \neg(\exists x)(f(x) = x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle f\rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.
   (a) Určete izomorfní spektrum $I(T, \kappa)$ teorie T pro spočetné κ (konečné i nekonečné). *(2b)*
   (b) Je teorie T konzervativní extenzí teorie $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2)\}$ jazyka $L' = \langle\rangle$ s rovností? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (c) Jsou teorie T a T' kompletní?. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (d) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*