Zkouška VPL - písemná část

1. února 2018

1. Nechť $M_n = \langle V, E\rangle$ je neorientovaná mřížka $n \times n$, kde $n \geq 2$, t.j. graf s vrcholy $V = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n\}$ a hranami $E = \{\{(i,j),(i+1,j)\} \mid 1 \leq i < n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{(i,j),(i,j+1)\} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < n\}$. Říkáme, že množina $A \subseteq E$ je *perfektní párování*, pokud každý vrchol je incidentní s právě jednou hranou z A.

   Chceme (rezolucí ve VL) ukázat, že pro liché n (speciálně pro $n = 3$) nemá mřížka M_n perfektní párování. Nechť $\mathbb{P}_n = \{p_{\{ij,i'j'\}} \mid \{(i,j),(i',j')\} \in E\}$ je množina prvovýroků, kde $p_{\{ij,i'j'\}}$ reprezentuje, že *"hrana $\{(i,j),(i',j')\}$ je v množině A"*.

   (a) Napište výrok $\varphi_{i,j}$, kde $1 \leq i,j \leq n$, nad $\mathbb{P}_n$ vyjadřující, že *"vrchol (i,j) je incidentní s právě jednou hranou z A"*. (Stačí příklad pro rohový vrchol $(1,1)$, krajní (nerohový) vrchol $(1,2)$ a vnitřní vrchol $(2,2)$). Pomocí výroků $\varphi_{i,j}$ napište teorii T_n vyjadřující, že *"množina A je perfektní párování grafu M_n."* *(2b)*

   (b) Nechť nyní $n = 3$. Nalezněte množinovou reprezentaci teorie T_3. *(2b)*

   (c) Předpokládejme navíc, že do množiny A patří hrana $\{(1,1),(1,2)\}$. Ukažte rezolucí, že $T_3 \cup \{p_{11,12}\}$ je nesplnitelná teorie. *(4b)*

   (d) Je $T_3 \vdash_{LI} \Box$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\exists x)P(x,x), (\forall x)(\exists y)R(x,y), (\forall u)(\forall v)(\exists x)(\forall y)(R(x,y) \to \neg P(u,v))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, R jsou binární relační symboly.

   (a) Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. *(2b)*

   (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nesplnitelná. *(4b)*

   (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T'. Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'', která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* *(2b)*

   (d) Je sentence $(\forall x)P(x,x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Buď $T = \{\neg(\exists x)(f(x) = x),\ f(x) = f(y) \to x = y,\ \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle f\rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol a axiom φ vyjadřuje *"Existuje nejvýše 5 prvků."*

   (a) Určete izomorfní spektrum teorie T. *(2b)*

   (b) Nalezněte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T. *(2b)*

   (c) Je teorie $S = \{\neg(\exists x)(f(x) = x),\ (\forall x)(\exists y)(f(y) = x),\ \varphi\}$ extenzí teorie T? Je T extenzí S? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Buď $\underline{\mathbb{Z}}_5 = \langle \mathbb{Z}_5, F\rangle$, kde $F(m) = m + 1 \bmod 5$ pro $m \in \mathbb{Z}$. Uveďte příklady množiny (i) definovatelné, (ii) nedefinovatelné ve struktuře $\underline{\mathbb{Z}}_5$. *(2b)*