Zkouška VPL - písemná část

7. února 2018

1. Dr. Cooper a dr. Kripke hrají hru kámen, nůžky, papír, tapír, Spock s následujícími pravidly:

   - každý si zvolí právě jeden z uvedených pěti symbolů (nezávisle na sobě),
   - nůžky stříhají papír,
   - papír balí kámen,
   - kámen rozdrtí tapíra,
   - tapír otráví Spocka,
   - <u>Spock zničí nůžky</u>,
   - nůžky utnou hlavu tapírovi,
   - tapír sní papír,
   - papír usvědčí Spocka,
   - <u>Spock vypaří kámen</u>,
   - <u>kámen tupí nůžky</u>.

   Víme, že

   (*i*) dr. Cooper nezvolil nůžky ani tapíra, dr. Kripke nezvolil papír, tapíra, ani Spocka,

   (*ii*) oba si zvolili různé symboly,

   (*iii*) pokud dr. Cooper zvolil papír, tak vyhrál.

   (a) Nechť $\mathbb{P} = \{k_1, n_1, p_1, t_1, s_1, v_1, k_2, n_2, p_2, t_2, s_2, v_2\}$ je množina prvovýroků, kde k_1, k_2 reprezentují, že "dr. Cooper (resp. dr. Kripke) zvolil kámen", obdobně i pro další symboly, a v_1, v_2 reprezentují, že "dr. Cooper (resp. dr. Kripke) vyhrál". Napište množinu T výroků nad $\mathbb{P}$ vyjadřujících pravidla hry a naše znalosti (*i*), (*ii*), (*iii*). (Z pravidel typu "nůžky stříhají papír" stačí uvést výrok pouze pro podtržená pravidla.) *(2b)*

   (b) Převeďte T do množinové reprezentace. (Z výroků pro pravidla typu "nůžky stříhají papír" stačí uvážit výroky uvedené v (a).) *(2b)*

   (c) Pomocí rezoluce dokažte, že $T \models v_1$, tj. dr. Cooper vyhrál. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(4b)*

   (d) Uveďte příklad výroku nad $\mathbb{P}$, který je nezávislý v teorii T, anebo zdůvodněte, proč takový výrok neexistuje. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\exists y)(P(y) \to P(x))\}$ je teorie v jazyce $L = \langle P \rangle$ bez rovnosti, kde P je unární relační symbol.

   (a) Nalezněte otevřenou konzervativní extenzi T' teorie T v jazyce L' rozšířeném pouze o unární funkční symbol f. *(2b)*

   (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie T' s položkou $F(\forall x)P(x)$ v kořeni. *(3b)*

   (c) V tablu z předchozího bodu nalezněte bezespornou větev V a kanonický model $\mathcal{A}$ z V takový, že $\mathcal{A} \models \neg P(x)$. *(3b)*

   (d) Je formule $(\forall x)P(x)$ pravdivá, lživá, či nezávislá v T'? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \to x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S \rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

   (a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(P(x)) = x$. *(2b)*

   (b) Buď $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, S \rangle$, kde $S(r) = r + 1$ pro $r \in \mathbb{R}$. Právě pro která $r \in \mathbb{R}$ je množina $\{r\}$ definovatelná v $\mathcal{R}$ z parametru 0? *(2b)*

   (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Je extenze T'' teorie T o axiom $S(x) = x$ ω-kategorická teorie? Je T'' kompletní? *(2b)*