Zkouška VPL - písemná část

13. února 2018

1. Nechť $n \geq 1$ je pevné přirozené číslo a označme $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Chceme rezolucí ve výrokové logice ukázat (konkrétně pro $n = 2$), že každá funkce $f\colon [n] \to [n]$, která je prostá, je zároveň na. Nechť $\mathbb{P} = \{p_{ij} \mid i, j \in [n]\}$ je množina prvovýroků, kde p_{ij} reprezentuje, že $f(i) = j$.

   (a) Napište výroky φ_n, ψ_n, χ_n nad $\mathbb{P}$ vyjadřující (po řadě) následující tvrzení. *(2b)*

   (i) *Pro každé $i \in [n]$ existuje právě jedno $j \in [n]$ takové, že $f(i) = j$ (tj. f je funkce).*

   (ii) *Pro každé $i_1, i_2 \in [n]$, $i_1 \neq i_2$, platí, že $f(i_1) \neq f(i_2)$ (tj. f je prostá).*

   (iii) *Pro každé $j \in [n]$ existuje $i \in [n]$ takové, že $f(i) = j$ (tj. f je na).*

   (b) Nechť nyní $n = 2$. Pomocí předchozích výroků nalezněte teorii T s axiomy v CNF, která je nesplnitelná, právě když $\{\varphi_2, \psi_2\} \models \chi_2$. Napište T v množinové reprezentaci. *(2b)*

   (c) Ukažte, že $T \vdash_R \square$. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(4b)*

   (d) Pro která $n \geq 1$ je teorie $\{\varphi_n, \psi_n\}$ kompletní? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\exists x)((\exists y)P(x,y) \to (\exists z)R(z)), (\forall x)(\neg R(x) \to (\exists y)P(x,y)), \neg(\exists x)R(x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, R je unární resp. binarní relační symbol.

   (a) Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. *(2b)*

   (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nesplnitelná. *(4b)*

   (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T'. Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'', která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b). (2b)*

   (d) Napište nějakou nekonzervativní extenzi teorie T nebo zdůvodněte, proč žádná neexistuje. *(2b)*

3. Nechť $T = \{x = f(f(x)), \varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle f\rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol a axiom φ vyjadřuje, že "existují nejvýše 3 prvky".

   (a) Určete izomorfní spektrum teorie T. *(2b)*

   (b) Napište dvě navzájem neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T. *(2b)*

   (c) Nechť $T' = \{f(x) = f(f(f(x))), \varphi\}$ je teorie stejného jazyka, axiom φ je stejný jako výše. Je T' extenze T? Je T extenze T'? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*