Výroková a predikátová logika - I

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2018/2019

K čemu je logika?

Pro matematiky: *“matematika o matematice”*.

Pro informatiky:

- formální specifikace (viz spor EU vs. Microsoft),
- testování software i hardware (formální verifikace, model checking),
- deklarativní programování (např. Prolog),
- složitost (Booleovské funkce, obvody, rozhodovací stromy),
- vyčíslitelnost (nerozhodnutelnost, věty o neúplnosti),
- umělá inteligence (automatické odvozování, rezoluce),
- univerzální nástroje: SAT a SMT řešiče (SAT modulo theory),
- návrh databází (konečné relační struktury, Datalog), ...

Koncepce přednášky

- klasická logika
  - + výroková logika (nejprve samostatně)
  - + predikátová logika
  - + teorie modelů, nerozhodnutelnost, neúplnost
- logika pro informatiky
  - + tablo metoda namísto Hilbertovského kalkulu
  - + dokazování jako forma výpočtu (systematické hledání protipříkladu)
  - + rezoluce v predikátové logice, unifikace, “pozadí” Prologu
  - + důraz na algoritmické otázky
  - + omezení na spočetné jazyky

Doporučená literatura

- Knihy
  - A. Nerode, R. A. Shore, *Logic for Applications*, Springer, 2^{nd} edition, 1997.
  - P. Pudlák, *Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity - A Gentle Introduction*, Springer, 2013.
  - V. Švejdar, *Logika, neúplnost, složitost a nutnost*, Academia, Praha, 2002.
  - A. Sochor, *Klasická matematická logika*, UK v Praze - Karolinum, 2001.
  - W. Hodges, *Shorter Model Theory*, Cambridge University Press, 1997.
  - W. Rautenberg, *A concise introduction to mathematical logic*, Springer, 2009.
- Elektronické zdroje
  - J. Mlček, *Výroková a predikátová logika*, skripta k přednášce, 2012. [www]
  - P. Štěpánek, *Meze formální metody*, skripta k přednášce, 2000. [pdf]
  - M. Pilát, Propositional and Predicate Logic, lecture notes, 2017. [pdf]
  - slidy k přednášce

Trocha historie

- Aristotelés (384-322 př.n.l.) - sylogismy, např.

  z *‘žádný Q není R’* a *‘každý P je Q’* odvoď *‘žádný P není R’*.

- Eukleidés: *Základy* (asi 330 př.n.l.) - axiomatický přístup ke geometrii

  “Pro každou přímku p a bod x, který neleží na p, existuje přímka skrze x neprotínající p.” (5. postulát)

- Descartes: *Geometrie* (1637) - algebraizace geometrie
- Leibniz - sen o *“lingua characteristica”* a *“calculus ratiocinator”* (1679-90)
- De Morgan - zavedení logických spojek (1847)

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

- Boole - výrok jako binární funkce, algebraizace logiky (1847)
- Schröder - sémantika predikátové logiky, koncept modelu (1890-1905)

Trocha historie - teorie množin

- Cantor - *intuitivní* teorie množin (1878), např. princip zahrnutí

  "Pro každou vlastnost $\varphi(x)$ existuje množina $\{x \mid \varphi(x)\}$."

- Frege - logika s kvantifikátory a predikáty, pojem důkazu jako odvození, axiomatická teorie množin (1879, 1884)
- Russel - Fregeho teorie množin je sporná (1903)

  Pro $a = \{x \mid \neg(x \in x)\}$ je $a \in a$?

- Russel, Whitehead - teorie typů (1910-13)
- Zermelo (1908), Fraenkel (1922) - *standardní* teorie množin ZFC, např.

  "Pro každou vlastnost $\varphi(x)$ a množinu y existuje množina $\{x \in y \mid \varphi(x)\}$."

- Bernays (1937), Gödel (1940) - teorie množin založená na třídách, např.

  "Pro každou množinovou vlastnost $\varphi(x)$ existuje třída $\{x \mid \varphi(x)\}$."

Trocha historie - algoritmizace

- Hilbert - kompletní axiomatizace Euklidovské geometrie (1899),
  formalismus - striktní odproštění se od významu, mechaničnost
  "... musí být možné místo o bodu, přímce a rovině mluvit o stolu, židli a půllitru." (Grundlagen der Geometrie)
- Brouwer - intuicionismus, důraz na konstruktivní důkazy
  "Matematické tvrzení je myšlenková konstrukce ověřitelná intuicí."
- Post - úplnost výrokové logiky (1921)
- Gödel - úplnost predikátové logiky (1930), věty o neúplnosti (1931)
- Kleene, Post, Church, Turing - formalizace pojmu algoritmus,
  existence algoritmicky nerozhodnutelných problémů (1936)
- Robinson - rezoluční metoda (1965)
- Kowalski; Colmerauer, Roussel - Prolog (1972)

Jazyk matematiky

Logika formalizuje pojem důkazu a pravdivosti matematických tvrzení.
Lze ji postupně rozčlenit dle prostředků jazyka.

- logické spojky *výroková logika*
  Umožňují vytvářet složená tvrzení ze základních.
- proměnné pro individua, funkční a relační symboly, kvantifikátory *1. řádu*
  Tvrzení o individuích, jejich vlastnostech a vztazích. Teorii množin, která je *"světem"* (téměř) celé matematiky, lze popsat jazykem 1. řádu.

V jazyce vyšších řádů máme navíc

- proměnné pro množiny individuí (i relace a funkce) *logika 2. řádu*
- proměnné pro množiny množin individuí, *atd.* *logika 3. řádu*
- ...

Příklady tvrzení v jazycích různých řádů

- *"Nebude-li pršet, nezmoknem. A když bude pršet, zmokneme, na sluníčku zase uschneme."* *výrok*

$$(\neg p \to \neg z) \wedge (p \to (z \wedge u))$$

- *"Existuje nejmenší prvek."* *1. řádu*

$$\exists x\, \forall y\, (x \le y)$$

- Axiom indukce. *2. řádu*

$$\forall X\, ((X(0) \wedge \forall x(X(x) \to X(x+1))) \to \forall x\, X(x))$$

- *"Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina."* *3. řádu*

$$\forall \mathcal{X} \forall Y((\forall X(\mathcal{X}(X) \to \mathcal{O}(X)) \wedge \forall x(Y(x) \leftrightarrow \exists X(\mathcal{X}(X) \wedge X(x)))) \to \mathcal{O}(Y))$$

Syntax a sémantika

Budeme studovat vztahy mezi syntaxí a sémantikou:

- *syntax*: symboly, pravidla vytváření termů a formulí, odvozovací pravidla, dokazovací systém, důkaz, dokazatelnost,
- *sémantika*: přiřazení významu, struktury, modely, splnitelnost, pravdivost.

V logice zavedeme pojem důkazu jako přesný syntaktický koncept.

Formální dokazovací systém je

- *korektní*, pokud každé dokazatelné tvrzení je pravdivé,
- *úplný*, pokud každé pravdivé tvrzení je dokazatelné.

Uvidíme, že predikátová logika (1. řádu) má dokazovací systémy, které jsou korektní a zároveň úplné. Pro logiky vyšších řádů to neplatí.

Paradoxy

"Paradoxy" jsou inspirací k přesnému zadefinování základů logiky.

- *paradox kréťana*
  Kréťan řekl: "Všichni kréťané jsou lháři."
- *paradox holiče*
  V městě žije holič, jenž holí všechny, kteří se neholí sami. Holí sám sebe?
- *paradox lháře*
  Tato věta je lživá.
- *Berryho paradox*
  Výraz "nejmenší přirozené číslo, které nelze definovat méně než jedenácti slovy" ho definuje pomocí deseti slov.

Množinové pojmy

Veškeré pojmy zavádíme v rámci teorie množin pouze pomocí predikátu náležení a rovnosti (a prostředků logiky).

- Množinová vlastnost $\varphi(x)$ definuje *třídu* $\{x \mid \varphi(x)\}$. Třída, která není množinou, se nazývá *vlastní*, např. $\{x \mid x = x\}$.
- $x \notin y$, $x \neq y$ jsou zkratkou za $\neg(x \in y)$, $\neg(x = y)$.
- $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ označuje množinu obsahující právě $x_0, \ldots, x_{n-1}$, $\{x\}$ se nazývá *singleton*, $\{x, y\}$ *neuspořádaná dvojice*.
- $\emptyset$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\triangle$ značí *prázdnou množinu*, *sjednocení*, *průnik*, *rozdíl*, *symetrický rozdíl* množin, např.
$$x \triangle y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x) = \{z \mid (z \in x \wedge z \notin y) \vee (z \notin x \wedge z \in y)\}$$
- x, y jsou *disjunktní* pokud $x \cap y = \emptyset$. $x \subseteq y$ značí, že x je *podmnožinou* y.
- *Potenční množina* (*potence*) x je $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$.
- *Sjednocení* (*suma*) x je $\bigcup x = \{z \mid \exists y(z \in y \wedge y \in x)\}$.
- *Pokrytí* množiny x je množina $y \subseteq \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$ s $\bigcup y = x$. Jsou-li navíc každé dvě (různé) množiny v y disjunktní, je y *rozklad* x.

Relace

- *uspořádaná dvojice* je $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$, tedy $(x, x) = \{x, \{x\}\}$,
  uspořádaná n-tice je $(x_0, \ldots, x_{n-1}) = ((x_0, \ldots, x_{n-2}), x_{n-1})$ pro $n > 2$,
- *kartézský součin* je $a \times b = \{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$,
  kartézská mocnina je $x^0 = \{\emptyset\}$, $x^1 = x$, $x^n = x^{n-1} \times x$ pro $n > 1$,
- *disjunktní sjednocení* je $x \uplus y = (\{\emptyset\} \times x) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times y)$,
- *relace* je jakákoliv množina R uspořádaných dvojic,
  namísto $(x, y) \in R$ píšeme obvykle $R(x, y)$ nebo $x\, R\, y$,
  definiční obor (*doména*) R je $\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y\, (x, y) \in R\}$,
  obor hodnot R je $\mathrm{rng}(R) = \{y \mid \exists x\, (x, y) \in R\}$,
  extenze prvku x v R je $R[x] = \{y \mid (x, y) \in R\}$,
  inverzní relace k R je $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$,
  restrikce R na množinu z je $R \upharpoonright z = \{(x, y) \in R \mid x \in z\}$,
- *složení* relací R a S je relace $R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y\, ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$,
- *identita* na množině z je relace $\mathrm{Id}_z = \{(x, x) \mid x \in z\}$.

Ekvivalence

- Relace R je *ekvivalence* na X, pokud pro všechna $x, y, z \in X$ platí

$$R(x, x) \qquad \text{(reflexivita)}$$
$$R(x, y) \rightarrow R(y, x) \qquad \text{(symetrie)}$$
$$R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z) \qquad \text{(tranzitivita)}$$

- $R[x]$ se nazývá *třída ekvivalence* (*faktor*) prvku x dle R, značíme i $[x]_R$.
- $X/R = \{R[x] \mid x \in X\}$ je *faktorizace* množiny X dle R.
- Platí, že X/R je rozklad X, neboť třídy jsou disjunktní a pokrývají X.
- Naopak, je-li S rozklad X, určuje ekvivalenci (na X)

$$\{(x, y) \mid x \in z, y \in z \text{ pro nějaké } z \in S\}.$$

Uspořádání

Nechť $\leq$ je relace na množině X. Řekneme, že $\leq$ je

- *částečné uspořádání* (množiny X), pokud pro všechna $x, y, z \in X$

$$x \leq x \qquad \text{(reflexivita)}$$
$$x \leq y \;\wedge\; y \leq x \;\rightarrow\; x = y \qquad \text{(antisymetrie)}$$
$$x \leq y \;\wedge\; y \leq z \;\rightarrow\; x \leq z \qquad \text{(tranzitivita)}$$

- *lineární* (*totální*) *uspořádání*, pokud navíc pro všechna $x, y \in X$

$$x \leq y \;\vee\; y \leq x \qquad \text{(dichotomie)}$$

- *dobré uspořádání*, pokud navíc každá neprázdná podmnožina X obsahuje *nejmenší* prvek.

Označme '$x < y$' za '$x \leq y \wedge x \neq y$'. Lineární uspořádání $\leq$ na X je

- *husté uspořádání*, pokud X není singleton a pro všechna $x, y \in X$

$$x < y \;\rightarrow\; \exists z\, (x < z \wedge z < y) \qquad \text{(hustota)}$$

Funkce

Relace f je funkce, pokud pro každé $x \in \mathrm{dom}(f)$ existuje jediné y s $(x, y) \in f$.

- Pak říkáme, že y je *hodnotou* funkce f v x, píšeme $f(x) = y$,
- $f\colon X \to Y$ značí, že f je funkce s $\mathrm{dom}(f) = X$ a $\mathrm{rng}(f) \subseteq Y$,
- funkce f je *na* (*surjektivní*) Y, pokud $\mathrm{rng}(f) = Y$,
- funkce f je *prostá* (*injektivní*), pokud pro všechna $x, y \in \mathrm{dom}(f)$
$$x \neq y \quad \rightarrow \quad f(x) \neq f(y)$$
- $f\colon X \to Y$ je *bijekce* X a Y, je-li prostá a na Y,
- je-li $f\colon X \to Y$ prostá, pak $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ je *inverzní funkce*,
- *obraz* množiny A přes f je $f[A] = \{y \mid (x, y) \in f \text{ pro nějaké } x \in A\}$,
- je-li $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$, pak pro jejich složení platí $(f \circ g)\colon X \to Z$ a
$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$
- ${}^{X}Y$ značí množinu všech funkcí z X do Y.

Čísla

Uvedeme příklady explicitních konstrukcí.

- Přirozená čísla definujeme induktivně vztahem $n = \{0, \ldots, n-1\}$, tedy
$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \ldots$$
- množina *přirozených* čísel $\mathbb{N}$ je definována jako nejmenší množina obsahující $\emptyset$ uzavřená na $S(x) := x \cup \{x\}$ (následník).
- množina *celých* čísel je $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$, kde $\sim$ je ekvivalence definovaná
$$(a, b) \sim (c, d) \text{ právě když } a + d = b + c$$
- množina *racionálních* čísel je $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \approx$, kde $\approx$ je dána
$$(a, b) \approx (c, d) \text{ právě když } a.d = b.c$$
- množina *reálných* čísel $\mathbb{R}$ je množina *řezů* racionálních čísel, tj. netriviálních, dolů uzavřených podmnožin $\mathbb{Q}$ bez největšího prvku. ($A \subset \mathbb{Q}$ je *dolů uzavřená*, pokud $y < x \in A$ implikuje $y \in A$.)

Velikosti množin

- x má *stejnou nebo menší velikost* než y (x je *subvalentní* y), pokud existuje prostá funkce $f\colon x \to y$, $(x \preccurlyeq y)$
- x má *stejnou velikost* jako y, existuje-li bijekce $f\colon x \to y$, $(x \approx y)$
- x má *menší velikost* než y, pokud $x \preccurlyeq y$ a není $x \approx y$, $(x \prec y)$

Věta (Cantor) *$x \prec \mathcal{P}(x)$ pro každou množinu x.*

Důkaz $f(y) = \{y\}$ pro $y \in x$ je prostá funkce $f\colon x \to \mathcal{P}(x)$, tedy $x \preccurlyeq \mathcal{P}(x)$.
Pro spor předpokládejme, že existuje prostá $g\colon \mathcal{P}(x) \to x$. Definujme

$$y = \{g(z) \mid z \subseteq x \wedge g(z) \notin z\}$$

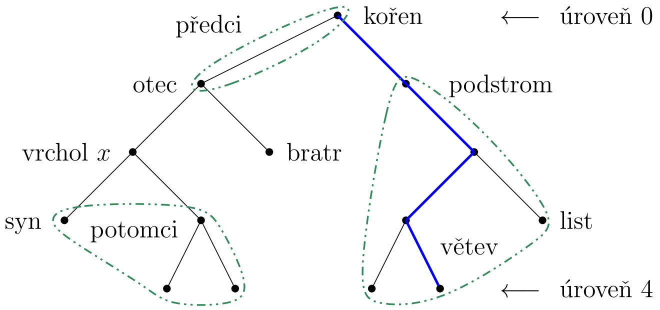
Dle definice, $g(y) \in y$ právě když $g(y) \notin y$, spor. $\square$

- pro každé x existuje *kardinální číslo* κ s $x \approx \kappa$, značíme $|x| = \kappa$,
- x je *konečná*, pokud $|x| = n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, jinak je *nekonečná*,
- x je *spočetná*, pokud je konečná nebo $|x| = |\mathbb{N}| = \omega$; jinak je *nespočetná*,
- x má *mohutnost kontinua*, pokud $|x| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

n-ární relace a funkce

- Relace *arity* (*četnosti*) $n \in \mathbb{N}$ na X je libovolná množina $R \subseteq X^n$, tedy pro $n = 0$ je $R = \emptyset = 0$ nebo $R = \{\emptyset\} = 1$, pro $n = 1$ je $R \subseteq X$,
- (Částečná) funkce *arity* (*četnosti*) $n \in \mathbb{N}$ z X do Y je libovolná funkce $f \subseteq X^n \times Y$. Řekneme, že f je *totální* na X^n, pokud $\mathrm{dom}(f) = X^n$, značíme $f\colon X^n \to Y$. Je-li navíc $Y = X$, je to *operace* na X.
- Funkce $f\colon X^n \to Y$ je *konstantní*, pokud $\mathrm{rng}(f) = \{y\}$ pro nějaké $y \in Y$, pro $n = 0$ je $f = \{(\emptyset, y)\}$ a f ztotožňujeme s *konstantou* y.
- Aritu relace či funkce značíme $\mathrm{ar}(R)$ či $\mathrm{ar}(f)$ a mluvíme o *nulárních*, *unárních*, *binárních*, obecně *n-árních* relacích a funkcích (operacích).

Stromy



- *Strom* je množina T s částečným uspořádáním $<_T$, ve kterém existuje (jedinečný) nejmenší prvek, zvaný *kořen*, a množina předků libovolného prvku je dobře uspořádaná,
- *větev* stromu T je maximální lineárně uspořádaná podmnožina T,
- adoptujeme standardní terminologii o stromech z teorie grafů, pak např.

větev v konečném stromu je cesta z kořene do listu.

Königovo lemma

Budeme pracovat *(pro jednoduchost)* obvykle s konečně větvícími se stromy, ve kterých má každý vrchol kromě kořene bezprostředního předka (*otce*).

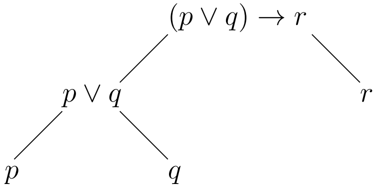
- *n-tá úroveň* stromu T pro $n \in \mathbb{N}$ je daná indukcí, obsahuje syny vrcholů z $(n-1)$-ní úrovně, 0-tá úroveň obsahuje právě kořen,
- *hloubka* stromu T je maximální číslo $n \in \mathbb{N}$ neprázdné úrovně; pokud má T nekonečnou větev, je *hloubka nekonečná* či ω.
- strom T je *n-ární* pro $n \in \mathbb{N}$, pokud každý vrchol má nejvýše n synů. Je *konečně větvící se*, má-li každý vrchol konečně mnoho synů.

Lemma (König) *Každý nekonečný, konečně větvící se strom T obsahuje nekonečnou větev.*

Důkaz Hledání nekonečné větve začneme v kořeni. Jelikož má jen konečně mnoho synů, existuje syn s nekonečně mnoha potomky. *Vybereme* ho a stejně pokračujeme v jeho podstromě. Takto získáme nekonečnou větev. □

Uspořádané stromy

- *Uspořádaný strom* je strom T, s kterým je dáno lineární uspořádání synů každého vrcholu, toto uspořádání se nazývá *pravolevé* a značí $<_L$. Oproti tomu, uspořádání $<_T$ se nazývá *stromové*.
- *značený strom* je strom T s libovolnou funkcí (*značící funkce*), která každému vrcholu T přiřazuje nějaký objekt (*značku*).
- značené uspořádané stromy např. zachycují strukturu formulí



Na závěr

- *Lze celou matematiku převést do logických formulí?*
  AI, strojové dokazování, Peano: *Formulario* (1895-1908), Mizar system
- *Proč to lidé (většinou) nedělají?*
- *Příklad* *Lze šachovnici bez dvou protilehlých rohů* perfektně *pokrýt kostkami domina?*

  Snadno vytvoříme výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když to lze. Pak ji můžeme zkusit ověřit např. rezolucí.

  Jak to vyřešíme *elegantněji*? V čem náš postup spočívá?