

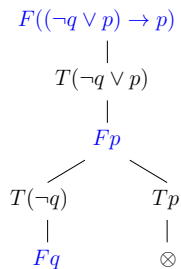
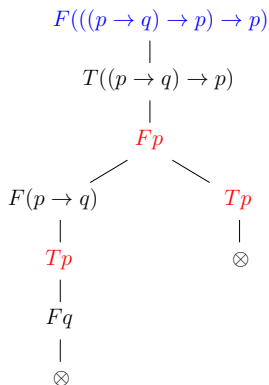
# Výroková a predikátová logika - IV

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2018/2019

# Tablo - příklady



# Atomická tabla

**Atomické tablo** je jeden z následujících (položkami značkovaných) stromů, kde  $p$  je libovolná výroková proměnná a  $\varphi, \psi$  jsou libovolné výrokové formule.

$Tp$	$Fp$	$T(\varphi \wedge \psi)$ $\begin{array}{c}   \\ T\varphi \\   \\ T\psi \end{array}$	$F(\varphi \wedge \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ F\varphi & F\psi \end{array}$	$T(\varphi \vee \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ T\varphi & T\psi \end{array}$	$F(\varphi \vee \psi)$ $\begin{array}{c}   \\ F\varphi \\   \\ F\psi \end{array}$
$T(\neg\varphi)$ $\begin{array}{c}   \\ F\varphi \end{array}$	$F(\neg\varphi)$ $\begin{array}{c}   \\ T\varphi \end{array}$	$T(\varphi \rightarrow \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ F\varphi & T\psi \end{array}$	$F(\varphi \rightarrow \psi)$ $\begin{array}{c}   \\ T\varphi \\   \\ F\psi \end{array}$	$T(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ T\varphi & F\varphi \\   &   \\ T\psi & F\psi \end{array}$	$F(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ T\varphi & F\varphi \\   &   \\ F\psi & T\psi \end{array}$

# Tablo z teorie

*Jak do důkazu přidat axiomy dané teorie?*

**Konečné tablo z teorie**  $T$  je binární, položkami značkový strom daný předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo,
- (ii) je-li  $P$  položka na větvi  $V$  konečného tabla  $\tau$  a  $\tau'$  vznikne z  $\tau$  **připojením** atomického tabla pro  $P$  na **konec větve**  $V$ , je  $\tau'$  rovněž konečné tablo,
- (ii)' je-li  $V$  větev konečného tabla ( $z T$ ) a  $\varphi \in T$ , pak připojením  $T\varphi$  na konec  $V$  vznikne rovněž konečné tablo z  $T$ .
- (iii) každé konečné tablo vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii), (ii)'.

**Tablo z teorie**  $T$  je posloupnost  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$  konečných tabel z  $T$  takových, že  $\tau_{n+1}$  vznikne z  $\tau_n$  pomocí pravidla (ii) či (ii)', formálně  $\tau = \cup \tau_n$ .

## Tablo důkaz z teorie

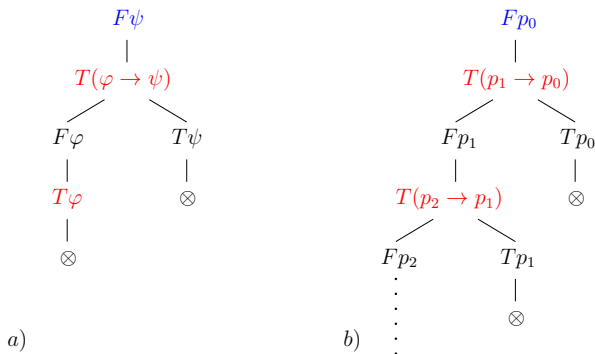
Nechť  $P$  je položka na větvi  $V$  tabla  $\tau$  z teorie  $T$ . Řekneme, že

- položka  $P$  je **redukována** na  $V$ , pokud se na  $V$  **vyskytuje** jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci  $\tau$  již došlo k jejímu rozvoji na  $V$ ,
- větev  $V$  je **sporná**, obsahuje-li položky  $T\varphi$  a  $F\varphi$  pro nějakou formuli  $\varphi$ ,
- větev  $V$  je **dokončená**, je-li sporná, nebo je každá její položka redukována na  $V$  a **navíc** obsahuje  $T\varphi$  pro každé  $\varphi \in T$ ,
- tablo  $\tau$  je **dokončené**, pokud je každá jeho větev dokončená, a je **sporné**, pokud je každá jeho větev sporná.

**Tablo důkaz** formule  $\varphi$  z teorie  $T$  je sporné tablo z  $T$  s  $F\varphi$  v kořeni. Má-li  $\varphi$  tablo důkaz z  $T$ , je **(tablo) dokazatelná z  $T$** , píšeme  $T \vdash \varphi$ .

**Zamítnutí** formule  $\varphi$  **tablem z teorie  $T$**  je sporné tablo z  $T$  s  $T\varphi$  v kořeni. Formule  $\varphi$  je **(tablo) zamítnutelná z  $T$** , má-li zamítnutí tablem z  $T$ , tj.  $T \vdash \neg\varphi$ .

# Příklady tabla z teorie



- a) Tablo **důkaz** formule  $\psi$  z teorie  $T = \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\}$ , tedy  $T \vdash \psi$ .
- b) **Dokončené** tablo pro formuli  $p_0$  z teorie  $T = \{p_{n+1} \rightarrow p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Všechny větve jsou dokončené, nejlevější větev je **bezesporná** a nekonečná. Poskytuje (jediný) model teorie  $T$ , ve kterém  $p_0$  neplatí.

# Systematické tablo

Popíšeme systematickou konstrukci, jež povede vždy k *dokončenému* tablu.

Nechť  $R$  je položka a  $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  je (konečná či nekonečná) teorie.

- (1) Za  $\tau_0$  vezmi atomické tablo pro  $R$ . Dokud to lze, aplikuj následující kroky.
- (2) Nechť  $P$  je **nejlevější** položka v co **nejmenší** úrovni již daného tabla  $\tau_n$ , která není redukována na nějaké bezesporné větvi procházející **skrze**  $P$ .
- (3) Za  $\tau'_n$  vezmi tablo vzniklé z  $\tau_n$  přidáním atomického tabla pro  $P$  na každou bezespornou větev skrze  $P$ . (Neexistuje-li  $P$ , vezmi  $\tau'_n = \tau_n$ .)
- (4) Za  $\tau_{n+1}$  vezmi tablo vzniklé z  $\tau'_n$  přidáním  $T\varphi_n$  na každou bezespornou větev neobsahující  $T\varphi_n$ . (Neexistuje-li  $\varphi_n$ , vezmi  $\tau_{n+1} = \tau'_n$ .)

**Systematické tablo** z teorie  $T$  pro položku  $R$  je výsledkem uvedené konstrukce, tj.  $\tau = \cup \tau_n$ .

# Systematické tablo - dokončenost

**Tvrzení** Pro každou teorii  $T$  a položku  $R$  je systematické tablo  $\tau$  **dokončené**.

**Důkaz** Necht'  $\tau = \cup \tau_n$  je systematické tablo z  $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  s  $R$  v kořeni.

- Je-li větev  $v$  v  $\tau$  bezesporná, je i každý její prefix  $v$  v  $\tau_n$  bezesporný.
- Je-li položka  $P$  neredukovaná na větvi  $v$  v  $\tau$ , je neredukovaná na každém jejím prefixu  $v$  v  $\tau_n$  (na němž leží).
- Do úrovně každé položky  $P$  (včetně její) je v  $\tau$  jen konečně položek.
- Kdyby  $P$  byla neredukovaná na nějaké bezesporné větvi  $\tau$ , přišla by na ní řada v nějakém kroku (2) a byla by zredukována krokem (3).
- Každá  $\varphi_n \in T$  bude dle (4) nejpozději v  $\tau_{n+1}$  na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo  $\tau$  obsahuje pouze dokončené větve.  $\square$



# Konečnost důkazů

**Tvrzení** Je-li  $\tau = \cup \tau_n$  sporné tablo, je  $\tau_n$  sporné **konečné** tablo pro nějaké  $n$ .

**Důkaz**

- Necht'  $S$  je množina vrcholů stromu  $\tau$ , jenž nad sebou neobsahují spor, tj. mezi předky nemají dvojici  $T\varphi, F\varphi$  pro žádné  $\varphi$ .
- Kdyby  $S$  byla nekonečná, dle **Königova lemmatu** by podstrom  $\tau$  na vrcholech  $S$  obsahoval nekonečnou větev, tedy by  $\tau$  nebylo sporné tablo.
- Jelikož je  $S$  konečné, všechny vrcholy z  $S$  leží do úrovně  $m$  pro nějaké  $m$ .
- Tedy každý vrchol v úrovni  $m + 1$  má nad sebou spor.
- Zvolme  $n$  takové, že  $\tau_n$  se shoduje s  $\tau$  do úrovně  $m + 1$  včetně.
- Pak každá větev v  $\tau_n$  je sporná.  $\square$

**Důsledek** Je-li systematické tablo  $\tau$  důkazem (z teorie  $T$ ), je  $\tau$  konečné.

**Důkaz** Při jeho konstrukci se prodlužují jen bezesporné větve.  $\square$

## Korektnost

Řekneme, že položka  $P$  se **shoduje** s ohodnocením  $\nu$ , pokud  $P$  je  $T\varphi$  a  $\bar{\nu}(\varphi) = 1$  nebo pokud  $P$  je  $F\varphi$  a  $\bar{\nu}(\varphi) = 0$ . Větev  $V$  tabla se shoduje s  $\nu$ , shoduje-li se s  $\nu$  každá položka na  $V$ .

**Lemma** *Nechť  $\nu$  je model teorie  $T$ , který se shoduje s položkou v kořeni tabla  $\tau = \cup \tau_n \in T$ . Pak v tablu  $\tau$  existuje větev shodující se s  $\nu$ .*

**Důkaz** Indukcí nalezneme posloupnost  $V_0, V_1, \dots$  takovou, že pro každé  $n$  je  $V_n$  větev v  $\tau_n$  shodující se s  $\nu$  a  $V_n$  je obsažena ve  $V_{n+1}$ .

- Ověřením atomických tabel snadno zjistíme, že základ indukce platí.
- Pokud  $\tau_{n+1}$  vznikne z  $\tau_n$  bez prodloužení  $V_n$ , položme  $V_{n+1} = V_n$ .
- Vznikne-li  $\tau_{n+1}$  z  $\tau_n$  připojením  $T\varphi$  k  $V_n$  pro nějaké  $\varphi \in T$ , necht'  $V_{n+1}$  je tato větev. Jelikož  $\nu$  je model  $\varphi$ , shoduje se  $V_{n+1}$  s  $\nu$ .
- Jinak  $\tau_{n+1}$  vznikne z  $\tau_n$  prodloužením  $V_n$  o atomické tablo nějaké položky  $P$  na  $V_n$ . Jelikož se  $P$  shoduje s  $\nu$  a tvrzení platí pro atomická tabla, lze požadovanou větev  $V_{n+1}$  v  $\tau_{n+1}$  nalézt.  $\square$

# Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je *korektní*.

**Věta** Pro každou teorii  $T$  a formuli  $\varphi$ , je-li  $\varphi$  tablo dokazatelná z  $T$ , je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

## Důkaz

- Necht'  $\varphi$  je tablo dokazatelná z teorie  $T$ , tj. existuje sporné tablo  $\tau$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že  $\varphi$  není pravdivá v  $T$ , tj. existuje model  $\nu$  teorie  $T$ , ve kterém  $\varphi$  neplatí (**protipříklad**).
- Jelikož se položka  $F\varphi$  shoduje s  $\nu$ , dle předchozího lemmatu v tablu  $\tau$  existuje větev shodující se s  $\nu$ .
- To ale není možné, neboť každá větev tabla  $\tau$  je sporná, tj. obsahuje dvojici  $T\psi, F\psi$  pro nějaké  $\psi$ .  $\square$

# Úplnost

Ukážeme, že bezesporná větev v dokončeném tablu poskytuje *protipříklad*.

**Lemma** Necht'  $V$  je *bezesporná* větev *dokončeného* tablu  $\tau$ . Pro následující ohodnocení  $v$  výrokových proměnných platí, že  $V$  se *shoduje* s  $v$ .

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud se } Tp \text{ vyskytuje na } V \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

**Důkaz** Indukcí dle struktury formule v položce vyskytující se na  $V$ .

- Je-li položka  $Tp$  na  $V$ , kde  $p$  je prvovýrok, je  $\bar{v}(p) = 1$  dle definice  $v$ .
- Je-li položka  $Fp$  na  $V$ , není  $Tp$  na  $V$ , jinak by  $V$  byla sporná, tedy  $\bar{v}(p) = 0$  dle definice  $v$ .
- Je-li  $T(\varphi \wedge \psi)$  na  $V$ , je  $T\varphi$  a  $T\psi$  na  $V$ , neboť  $\tau$  je dokončené. Dle indukčního předpokladu je  $\bar{v}(\varphi) = \bar{v}(\psi) = 1$ , tedy  $\bar{v}(\varphi \wedge \psi) = 1$ .
- Je-li  $F(\varphi \wedge \psi)$  na  $V$ , je  $F\varphi$  nebo  $F\psi$  na  $V$ , neboť  $\tau$  je dokončené. Dle indukčního předpokladu je  $\bar{v}(\varphi) = 0$  nebo  $\bar{v}(\psi) = 0$ , tedy  $\bar{v}(\varphi \wedge \psi) = 0$ .
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech. □

## Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je i **úplná**.

**Věta** Pro každou teorii  $T$  a formuli  $\varphi$ , je-li  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , je  $\varphi$  tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz** Nechť  $\varphi$  je pravdivá v  $T$ . Ukážeme, že libovolné **dokončené** tablo (např. **systematické**)  $\tau$  z teorie  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni je **sporné**.

- Kdyby ne, nechť  $V$  je nějaká bezesporná větev tabla  $\tau$ .
- Dle předchozího lemmatu existuje ohodnocení  $v$  prvovýroků takové, že  $V$  se shoduje s  $v$ , speciálně s  $F\varphi$ , tj.  $\bar{v}(\varphi) = 0$ .
- Jelikož větev  $V$  je dokončená, obsahuje  $T\psi$  pro každé  $\psi \in T$ .
- Tedy  $v$  je modelem teorie  $T$  (neboť větev  $V$  se shoduje s  $v$ ).
- To je ale ve sporu s tím, že  $\varphi$  platí v každém modelu teorie  $T$ .

Tedy tablo  $\tau$  je důkazem  $\varphi$  z  $T$ .  $\square$

## Vlastnosti teorií

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť  $T$  je teorie nad  $\mathbb{P}$ . Je-li  $\varphi$  dokazatelná z  $T$ , řekneme, že  $\varphi$  je **věta** (*teorém*) teorie  $T$ . Množinu vět teorie  $T$  označme

$$\text{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie  $T$  je

- **sporná**, jestliže je v  $T$  dokazatelný  $\perp$  (spor), jinak je **bezesporná**,
- **kompletní**, jestliže není sporná a každá formule je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj.  $T \vdash \varphi$  či  $T \vdash \neg\varphi$  pro každé  $\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}}$ ,
- **extenze** teorie  $T'$  nad  $\mathbb{P}'$ , jestliže  $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$  a  $\text{Thm}^{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \text{Thm}^{\mathbb{P}}(T)$ , o extenzi  $T$  teorie  $T'$  řekneme, že je **jednoduchá**, pokud  $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$ , a **konzervativní**, pokud  $\text{Thm}^{\mathbb{P}'}(T') = \text{Thm}^{\mathbb{P}}(T) \cap \text{VF}_{\mathbb{P}'}$ ,
- **ekvivalentní** s teorií  $T'$ , jestliže  $T$  je extenzí  $T'$  a  $T'$  je extenzí  $T$ .

# Důsledky

Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.

**Důsledek** Pro každou teorii  $T$  a formule  $\varphi, \psi$  nad  $\mathbb{P}$ ,

- $T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$ ,
- $\text{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \theta^{\mathbb{P}}(T)$ ,
- $T$  je sporná, právě když není splnitelná, tj. nemá model,
- $T$  je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má právě jeden model,
- $T, \varphi \vdash \psi$  právě když  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$  (Věta o dedukci).

**Poznámka** Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

## Věta o kompaktnosti

**Věta** *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

**Důkaz 1** Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie  $T$  nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný  $\perp$  systematickým tablem  $\tau$ . Jelikož je  $\tau$  konečné, je  $\perp$  dokazatelný z nějaké konečné  $T' \subseteq T$ , tj.  $T'$  nemá model.  $\square$

**Poznámka** *Tento důkaz je založen na konečnosti důkazu, korektnosti a úplnosti. Uved'me ještě druhý, přímý důkaz (pomocí Königova lemmatu).*

**Důkaz 2** Nechť  $T = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Uvažme strom  $S$  na konečných binárních posloupnostech  $\sigma$  uspořádaných prodloužením. Přičemž  $\sigma \in S$ , právě když existuje ohodnocení  $v$  prodlužující  $\sigma$  takové, že  $v \models \varphi_i$  pro každé  $i \leq \text{lth}(\sigma)$ .

**Pozorování**  *$S$  má nekonečnou větev, právě když  $T$  má model.*

Jelikož  $\{\varphi_i \mid i \in n\} \subseteq T$  má model pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , bude každá úroveň v  $S$  neprázdná. Tedy  $S$  je nekonečný, navíc binární, a dle Königova lemmatu obsahuje nekonečnou větev.  $\square$



## Aplikace kompaktnosti

Graf  $(V, E)$  je ***k*-obarvitelný**, pokud existuje  $c: V \rightarrow k$  takové, že  $c(u) \neq c(v)$  pro každou hranu  $\{u, v\} \in E$ .

**Věta** *Spočetně nekonečný graf  $G = (V, E)$  je *k*-obarvitelný, právě když každý jeho konečný podgraf je *k*-obarvitelný.*

**Důkaz** Implikace zleva doprava je zřejmá. Necht' každý konečný podgraf  $v$   $G$  je *k*-obarvitelný. Vezměme  $\mathbb{P} = \{p_{u,i} \mid u \in V, i \in k\}$  a teorii  $T$  s axiomy

$$\begin{array}{ll}
 p_{u,0} \vee \cdots \vee p_{u,k-1} & \text{pro všechna } u \in V, \\
 \neg(p_{u,i} \wedge p_{u,j}) & \text{pro všechna } u \in V, i < j < k, \\
 \neg(p_{u,i} \wedge p_{v,i}) & \text{pro všechna } \{u, v\} \in E, i < k.
 \end{array}$$

Platí, že  $G$  je *k*-obarvitelný, právě když  $T$  má model. Dle věty o kompaktnosti stačí dokázat, že každá konečná  $T' \subseteq T$  má model. Necht'  $G'$  je podgraf na vrcholech  $u$  takových, že  $p_{u,i}$  se vyskytuje v  $T'$  pro nějaké  $i$ . Jelikož  $G'$  je *k*-obarvitelný dle předpokladu, má  $T'$  model.  $\square$