Výroková a predikátová logika - V

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2018/2019

Rezoluční metoda - úvod

Hlavní rysy rezoluční metody (*neformálně*)

- je základem mnoha různých systémů, např. interpret Prologu, SAT řešiče, systémy pro automatické dokazování / verifikování, . . .
- předpokládá formule v CNF (převod obecně *“drahý”*),
- pracuje s množinovou reprezentací formulí,
- má jediné odvozovací pravidlo, tzv. rezoluční pravidlo,
- nemá žádné explicitní axiomy (či atomická tabla), ale jisté axiomy jsou skryty *“uvnitř”*,
- obdobně jako u tablo metody, jde o *zamítací* proceduru, tj. snaží se ukázat, že daná formule (či teorie) je nesplnitelná,
- má různé varianty lišící se např. podmínkami pro použití rezolučního pravidla.

Množinová reprezentace (formulí v CNF)

- *Literál* l je výroková proměnná nebo její negace. $\bar{l}$ značí *opačný* literál k l.
- *Klauzule* C je konečná množina literálů (*"tvořících disjukci"*). Prázdná klauzule se značí $\square$, není nikdy splněna (neobsahuje splněný literál).
- *Formule* S je množina (i nekonečná) klauzulí (*"tvořících konjunkci"*). Prázdná formule $\emptyset$ je vždy splněna (neobsahuje nesplněnou klauzuli). Nekonečné formule reprezentují nekonečné teorie (konjunkcí axiomů).
- (*Částečné*) *ohodnocení* $\mathcal{V}$ je libovolná konzistentní množina literálů, tj. neobsahující dvojici opačných literálů. Ohodnocení $\mathcal{V}$ je *totální*, obsahuje-li pozitivní či negativní literál od každé výrokové proměnné.
- $\mathcal{V}$ *splňuje* S, značíme $\mathcal{V} \models S$, pokud $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ pro každé $C \in S$.

Např. $((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee s) \wedge s)$ reprezentujeme

$$S = \{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg r, \neg s\}, \{\neg t, s\}, \{s\}\} \quad \text{a}$$

$$\mathcal{V} \models S \quad \text{pro} \quad \mathcal{V} = \{s, \neg r, \neg p\}$$

Rezoluční pravidlo

Nechť C_1, C_2 jsou klauzule a $l \in C_1$, $\bar{l} \in C_2$ pro nějaký literál l. Pak z C_1 a C_2 odvoď přes literál l klauzuli C, zvanou *rezolventa*, kde

$$C = (C_1 \setminus \{l\}) \cup (C_2 \setminus \{\bar{l}\}).$$

Ekvivalentně zapsáno, označíme-li $\sqcup$ disjunktní sjednocení,

$$\frac{C_1' \sqcup \{l\}, C_2' \sqcup \{\bar{l}\}}{C_1' \cup C_2'}$$

Např. z $\{p, q, r\}$ a $\{\neg p, \neg q\}$ lze odvodit $\{q, \neg q, r\}$ nebo $\{p, \neg p, r\}$.

Pozorování *Rezoluční pravidlo je korektní, tj. pro libovolné ohodnocení $\mathcal{V}$,*

$$\mathcal{V} \models C_1 \text{ a } \mathcal{V} \models C_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V} \models C.$$

Poznámka *Rezoluční pravidlo je speciální případ pravidla řezu*

$$\frac{\varphi \vee \psi, \ \neg\varphi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule.

Rezoluční důkaz

- *rezoluční důkaz* (*odvození*) klauzule C z formule S je konečná posloupnost $C_0, \ldots, C_n = C$ taková, že pro každé $i \leq n$ je $C_i \in S$ nebo je C_i rezolventou nějakých dvou předchozích klauzulí (i stejných),
- klauzule C je (rezolucí) *dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_R C$, pokud má rezoluční důkaz z S,
- *zamítnutí* formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S,
- S je (rezolucí) *zamítnutelná*, pokud $S \vdash_R \square$.

Věta (korektnost) *Je-li S rezolucí zamítnutelná, je S nesplnitelná.*

Důkaz Nechť $S \vdash_R \square$. Kdyby $\mathcal{V} \models S$ pro nějaké ohodnocení $\mathcal{V}$, z korektnosti rezolučního pravidla by platilo i $\mathcal{V} \models \square$, což není možné. ■

Rezoluční strom a uzávěr

Rezoluční strom klauzule C z formule S je konečný binární strom s vrcholy označenými klauzulemi takový, že

(i) kořen je označen C,

(ii) listy jsou označeny klauzulemi z S,

(iii) každý vnitřní vrchol je označen rezolventou z klauzulí v jeho synech.

Pozorování *C má rezoluční strom z S právě když $S \vdash_R C$.*

Rezoluční uzávěr $\mathcal{R}(S)$ formule S je nejmenší induktivní množina definovaná

(i) $C \in \mathcal{R}(S)$ pro každé $C \in S$,

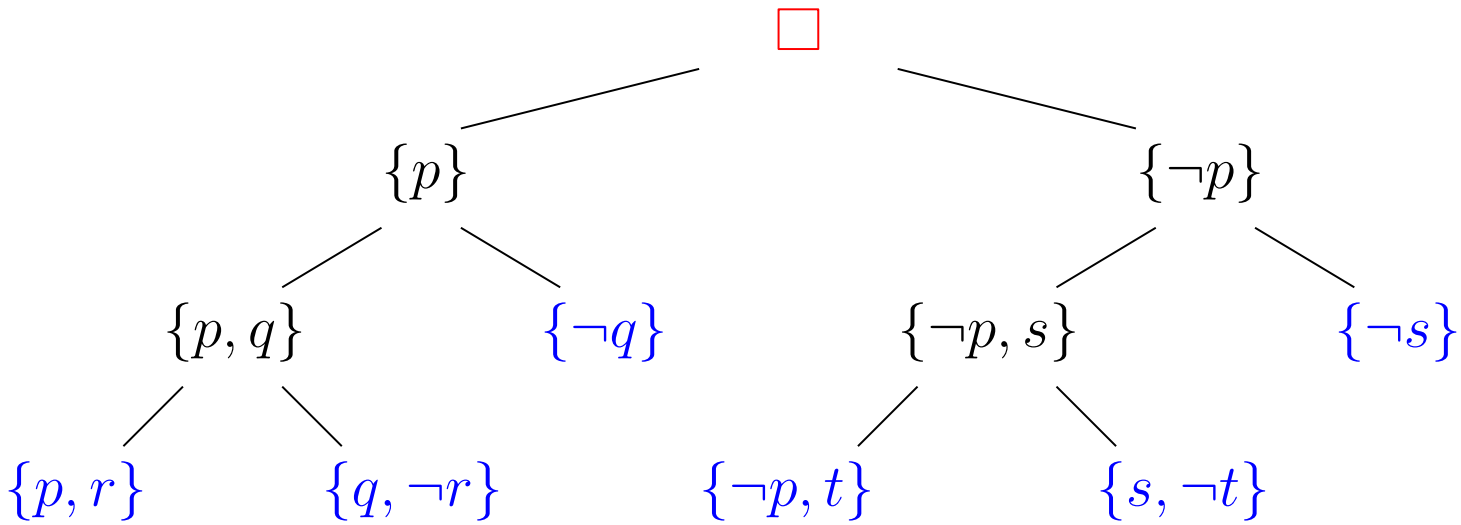
(ii) jsou-li $C_1, C_2 \in \mathcal{R}(S)$ a C je rezolventa C_1, C_2, je zároveň $C \in \mathcal{R}(S)$.

Pozorování *$C \in \mathcal{R}(S)$ právě když $S \vdash_R C$.*

Poznámka *Všechny pojmy o rezolučních důkazech lze tedy ekvivalentně zavést pomocí rezolučních stromů či uzávěrů.*

Příklad

Formule $((p \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg q) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (\neg s) \wedge (s \vee \neg t))$ je nesplnitelná, neboť pro $S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$ je $S \vdash_R \square$.



Rezoluční uzávěr S je

$$\mathcal{R}(S) = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}, \{p, q\}, \{\neg r\}, \{r, t\}, \{q, t\}, \{\neg t\}, \{\neg p, s\}, \{r, s\}, \{t\}, \{q\}, \{q, s\}, \square, \{\neg p\}, \{p\}, \{r\}, \{s\}\}.$$

Redukce dosazením

Nechť S je formule a l je literál. Označme

$$S^l = \{C \setminus \{\bar{l}\} \mid l \notin C \in S\}.$$

Pozorování

- S^l je ekvivalentní formuli, jež vznikne dosazením konstanty $\top$ (true, 1) za literály l a konstanty $\bot$ (false, 0) za literály $\bar{l}$ ve formuli S,
- S^l neobsahuje v žádné klauzuli literál l ani $\bar{l}$,
- jestliže $\{\bar{l}\} \in S$, pak $\square \in S^l$.

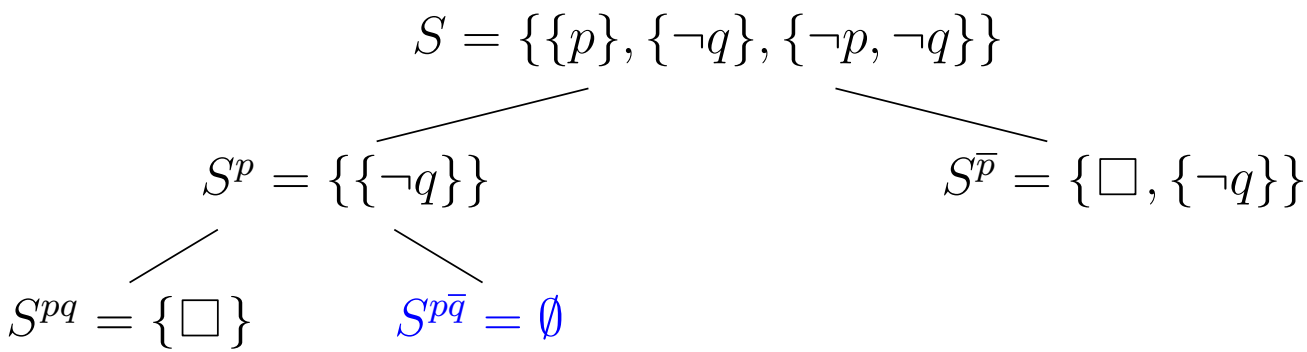
Lemma *S je splnitelná, právě když S^l nebo $S^{\bar{l}}$ je splnitelná.*

Důkaz ($\Rightarrow$) Nechť $\mathcal{V} \models S$ pro nějaké $\mathcal{V}$ a předpokládejme (búno), že $\bar{l} \notin \mathcal{V}$.

- Pak $\mathcal{V} \models S^l$, neboť pro $l \notin C \in S$ je $\mathcal{V} \setminus \{l, \bar{l}\} \models C$ a tudíž $\mathcal{V} \models C \setminus \{\bar{l}\}$.
- Naopak ($\Leftarrow$) předpokládejme (búno), že $\mathcal{V} \models S^l$ pro nějaké $\mathcal{V}$.
- Jelikož se l ani $\bar{l}$ nevyskytuje v S^l, je i $\mathcal{V}' \models S^l$ pro $\mathcal{V}' = (\mathcal{V} \setminus \{\bar{l}\}) \cup \{l\}$.
- Pak $\mathcal{V}' \models S$, neboť pro $C \in S$ obsahující l máme $l \in \mathcal{V}'$ a pro $C \in S$ neobsahující l je $\mathcal{V}' \models (C \setminus \{\bar{l}\}) \in S^l$. ■

Strom dosazení

Postupnou redukci literálů dosazením lze reprezentovat binárním stromem.



Důsledek *S není splnitelná, právě když každá větev obsahuje $\square$.*

Poznámka Jelikož S může být nekonečná nad spočetným jazykem, strom může být nekonečný. Je-li ale S nesplnitelná, dle věty o kompaktnosti existuje konečná část $S' \subseteq S$, která je nesplnitelná. Pak po redukci všech literálů vyskytujících se v S' bude $\square$ v každé větvi po konečně mnoha krocích.

Úplnost rezoluce

Věta *Je-li konečná S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná, tj. $S \vdash_R \square$.*

Důkaz Indukcí dle počtu proměnných v S ukážeme, že $S \vdash_R \square$.

- Nemá-li nesplnitelná S žádnou proměnnou, je $S = \{\square\}$ a tedy $S \vdash_R \square$,
- Nechť l je literál vyskytující se v S. Dle lemmatu, S^l a $S^{\bar{l}}$ jsou nesplnitelné.
- Jelikož S^l a $S^{\bar{l}}$ mají méně proměnných než S, dle indukčního předpokladu existují rezoluční stromy T^l a $T^{\bar{l}}$ pro odvození $\square$ z S^l resp. $S^{\bar{l}}$.
- Je-li každý list T^l z S, je T^l rezolučním stromem $\square$ z S, tj. $S \vdash_R \square$.
- Pokud ne, doplněním literálu $\bar{l}$ do každého listu, jenž není z S, (a do všech vrcholů nad ním) získáme rezoluční strom $\{\bar{l}\}$ z S.
- Obdobně získáme rezoluční strom $\{l\}$ z S doplněním l ve stromu $T^{\bar{l}}$,
- Rezolucí jejich kořenů $\{\bar{l}\}$ a $\{l\}$ získáme rezoluční strom $\square$ z S. ■

Důsledek *Je-li S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná, tj. $S \vdash_R \square$.*

Důkaz Plyne z předchozího užitím věty o kompaktnosti.

Lineární rezoluce - úvod

Rezoluční metodu můžeme značně omezit (bez ztráty úplnosti).

- *Lineární důkaz* (rezolucí) klauzule C z formule S je konečná posloupnost dvojic $(C_0, B_0), \ldots, (C_n, B_n)$ taková, že $C_0 \in S$ a pro každé $i \leq n$

  i) $B_i \in S$ nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$, a

  ii) C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i, kde $C_{n+1} = C$.

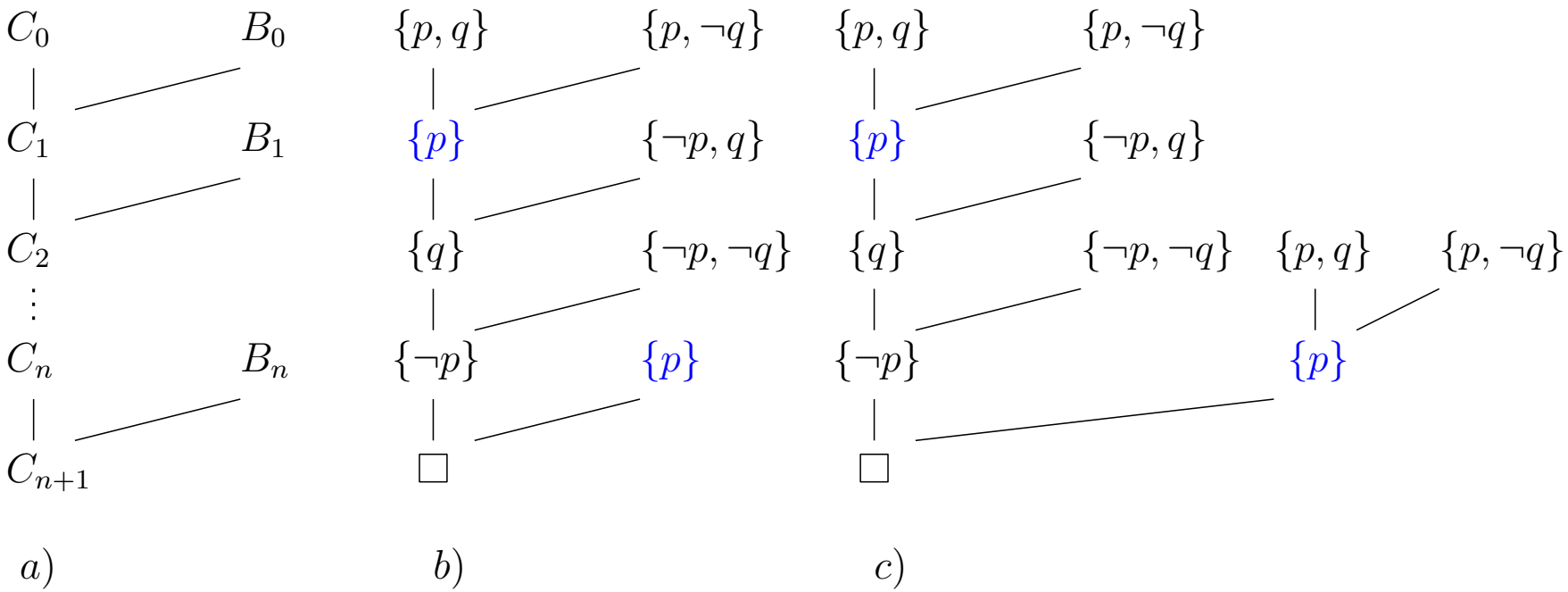
- C_0 zveme *počáteční* klauzule, C_i *centrální* klauzule, B_i *boční* klauzule.
- C je *lineárně dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_L C$, má-li lineární důkaz z S.
- *Lineární zamítnutí* S je lineární důkaz $\square$ z S.
- S je *lineárně zamítnutelná*, pokud $S \vdash_L \square$.

Pozorování *Je-li S lineárně zamítnutelná, je S nesplnitelná.*

Důkaz Každý lineární důkaz lze transformovat na (korektní) rezoluční důkaz.

Poznámka *Platí i úplnost, tj. je-li S nesplnitelná, je S lineárně zamítnutelná.*

Příklad lineární rezoluce



$a)$ obecný tvar lineární rezoluce,

$b)$ pro $S = \{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ je $S \vdash_L \square$,

$c)$ transformace lineárního důkazu na rezoluční důkaz.

LI-rezoluce

Pro Hornovy formule můžeme lineární rezoluci dál omezit.

- *Hornova formule* je množina (i nekonečná) Hornových klauzulí.
- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál.
- *Fakt* je (Hornova) klauzule $\{p\}$, kde p je pozitivní literál.
- *Pravidlo* je (Hornova) klauzule s právě jedním pozitivním a aspoň jedním negativním literálem. Pravidla a fakta jsou *programové klauzule*.
- *Cíl* je neprázdná (Hornova) klauzule bez pozitivního literálu.

Pozorování *Je-li Hornova formule S nesplnitelná a $\square \notin S$, obsahuje fakt i cíl.*

Důkaz Neobsahuje-li fakt (cíl), je splnitelná nastavením všech proměnných na 0 (resp. na 1). ■

LI-rezoluce (linear input) z formule S je lineární rezoluce z S, ve které je každá boční klauzule B_i ze (vstupní) formule S.

Je-li klauzule C dokazatelná LI-rezolucí z S, píšeme $S \vdash_{LI} C$.

Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy formule

Věta *Je-li Hornova T splnitelná a $T \cup \{G\}$ nesplnitelná pro cíl G, lze $\square$ odvodit LI-rezolucí z $T \cup \{G\}$ začínající G.*

Důkaz Dle věty o kompaktnosti můžeme předpokládat, že T je konečná.

- Postupujeme indukcí dle počtu proměnných v T.
- Dle pozorování, T obsahuje fakt $\{p\}$ pro nějakou proměnnou p.
- Dle lemmatu je $T' = (T \cup \{G\})^p = T^p \cup \{G^p\}$ nesplnitelná, přičemž $G^p = G \setminus \{\overline{p}\}$.
- Je-li $G^p = \square$, je $G = \{\overline{p}\}$ a tedy $\square$ je rezolventa G a $\{p\} \in T$.
- Jinak, jelikož T^p je splnitelná (stejným ohodnocením, které splňuje T) a má méně proměnných, dle indukčního předpokladu lze $\square$ odvodit LI-rezolucí z T' začínající G^p.
- Doplněním literálu $\overline{p}$ do všech listů, jež nejsou v $T \cup \{G\}$, a všech vrcholů pod ním získáme LI-odvození $\{\overline{p}\}$ z $T \cup \{G\}$ začínající v G.
- Závěrečnou rezolucí pomocí faktu $\{p\} \in T$ získáme $\square$. ■

Příklad LI-rezoluce

$T = \{\{p, \neg r, \neg s\}, \{r, \neg q\}, \{q, \neg s\}, \{s\}\}, \qquad G = \{\neg p, \neg q\}$

$T^s = \{\{p, \neg r\}, \{r, \neg q\}, \{q\}\}$

$T^{sq} = \{\{p, \neg r\}, \{r\}\}$

$T^{sqr} = \{\{p\}\}$

$G^{sqr} = \{\neg p\} \quad \{p\}$

$G^{sqrp} = \square$

$G^{sq} = \{\neg p\} \quad \{p, \neg r\}$

$\{\neg r\} \quad \{r\}$

$\square$

$G^s = \{\neg p, \neg q\} \quad \{p, \neg r\}$

$\{\neg q, \neg r\} \quad \{r, \neg q\}$

$\{\neg q\} \qquad \{q\}$

$\square$

$G = \{\neg p, \neg q\} \qquad \{p, \neg r, \neg s\}$

$\{\neg q, \neg r, \neg s\} \quad \{r, \neg q\}$

$\{\neg q, \neg s\} \qquad \{q, \neg s\}$

$\{\neg s\} \qquad \{s\}$

$\square$

$T^{sqr}, G^{sqr} \vdash_{LI} \square \qquad T^{sq}, G^{sq} \vdash_{LI} \square \qquad T^s, G^s \vdash_{LI} \square \qquad T, G \vdash_{LI} \square$

Program v Prologu

(Výrokový) *program* (v Prologu) je Hornova formule obsahující pouze programové klauzule, tj. fakta nebo pravidla.

pravidlo	$p :- q, r.$	$q \wedge r \to p$	$\{p, \neg q, \neg r\}$	
	$p :- s.$	$s \to p$	$\{p, \neg s\}$	
	$q :- s.$	$s \to q$	$\{q, \neg s\}$	
fakt	$r.$	r	$\{r\}$	
	$s.$	s	$\{s\}$	*program*
dotaz	$?- p, q.$		$\{\neg p, \neg q\}$	*cíl*

Zajímá nás, zda daný dotaz vyplývá z daného programu.

Důsledek *Pro každý program P a dotaz $(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n)$ je ekvivalentní, zda*

(1) $P \models p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$,

(2) $P \cup \{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}$ je nesplnitelná,

(3) $\square$ lze odvodit LI-rezolucí z $P \cup \{G\}$ začínající cílem $G = \{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}$.

Hilbertovský kalkul

- základní logické spojky: $\neg$, $\rightarrow$ (ostatní z nich odvozené)
- *logické axiomy* (schémata logických axiomů):

$$(i) \qquad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(ii) \qquad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(iii) \qquad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

  kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule (daného jazyka).

- *odvozovací pravidlo*:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$ (modus ponens)

Důkaz (*Hilbertova stylu*) formule φ v teorii T je konečná posloupnost $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ formulí taková, že pro každé $i \leq n$

- φ_i je logický axiom nebo $\varphi_i \in T$ (axiom teorie), nebo
- φ_i lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacího pravidla.

Poznámka *Volba axiomů a odvozovacích pravidel se v může v různých dokazovacích systémech Hilbertova stylu lišit.*

Příklad a korektnost

Formule φ je *dokazatelná* v T, má-li důkaz z T, značíme $T \vdash_H \varphi$.

Je-li $T = \emptyset$, značíme $\vdash_H \varphi$. Např. pro $T = \{\neg\varphi\}$ je $T \vdash_H \varphi \to \psi$ pro každé ψ.

1)	$\neg\varphi$	axiom z T
2)	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	logický axiom (i)
3)	$\neg\psi \to \neg\varphi$	modus ponens z 1), 2)
4)	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	logický axiom (iii)
5)	$\varphi \to \psi$	modus ponens z 3), 4)

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.*

Důkaz

- Je-li $\varphi \in T$ nebo logický axiom, je $T \models \varphi$ (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, pak $T \models \psi$, tj. modus ponens je korektní,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T. □

Poznámka *Platí i úplnost, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$ pro každou teorii T a formuli φ.*