Výroková a predikátová logika - VI

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2018/2019

Predikátová logika

Zabývá se tvrzeními o individuích, jejich vlastnostech a vztazích.

"Je inteligentní a její otec zná pana rektora." $I(x) \wedge Z(o(x), r)$

- x je proměnná, reprezentuje individuum,
- r je konstantní symbol, reprezentuje konkrétní individuum,
- o je funkční symbol, reprezentuje funkci,
- I, Z jsou relační (predikátové) symboly, reprezentují relace (vlastnost *"být inteligentní"* a vztah *"znát"*).

"Funkce f je na (surjektivní)." $(\forall x)(\exists y)(f(y) = x)$

- $(\forall x)$ je všeobecný (univerzální) kvantifikátor proměnné x,
- $(\exists y)$ je existenční kvantifikátor proměnné y,
- $=$ je (binární) relační symbol, reprezentuje identickou relaci.

Jazyk

Jazyk 1. řádu obsahuje

- proměnné $x, y, z, \ldots, x_0, x_1, \ldots$ (spočetně mnoho), množinu všech proměnných značíme Var,
- funkční symboly $f, g, h, \ldots$, včetně konstantních symbolů $c, d, \ldots$, což jsou nulární funkční symboly,
- relační (predikátové) symboly $P, Q, R, \ldots$, případně symbol $=$ (rovnost) jako speciální relační symbol,
- kvantifikátory $(\forall x)$, $(\exists x)$ pro každou proměnnou $x \in \mathrm{Var}$,
- logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- závorky (,)

Každý funkční i relační symbol S má danou *aritu* (*četnost*) $\mathrm{ar}(S) \in \mathbb{N}$.

Poznámka Oproti výrokové logice nemáme (explicitně) výrokové proměnné, lze je zavést jako nulární relační symboly.

Signatura jazyka

- Proměnné, kvantifikátory, logické spojky a závorky jsou *logické symboly*, zatímco funkční a relační symboly (kromě případné rovnosti) jsou *mimologické symboly*. Rovnost (obvykle) uvažujeme zvlášť.
- *Signatura* je dvojice $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ disjunktních množin relačních a funkčních symbolů s danými aritami, přičemž žádný z nich není rovnost. Signatura tedy určuje všechny mimologické symboly.
- *Jazyk* je dán signaturou $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a uvedením, zda jde o jazyk s rovností či bez rovnosti. Jazyk musí obsahovat alespoň jeden relační symbol (mimologický nebo rovnost).

Poznámka *Význam symbolů není v jazyce určen, např. symbol $+$ nemusí reprezentovat standardní sčítání.*

Příklady jazyků

Jazyk obvykle uvádíme výčtem mimologických symbolů s případným upřesněním, zda jde o funkční či relační symboly a jakou mají aritu.

Následující příklady jazyků jsou všechny s rovností.

- $L = \langle\ \rangle$ je jazyk čisté rovnosti,
- $L = \langle c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ je jazyk spočetně mnoha konstant,
- $L = \langle \leq \rangle$ je jazyk uspořádání,
- $L = \langle E \rangle$ je jazyk teorie grafů,
- $L = \langle +, -, 0 \rangle$ je jazyk teorie grup,
- $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je jazyk teorie těles,
- $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ je jazyk Booleových algeber,
- $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je jazyk aritmetiky,

kde c_i, 0, 1 jsou konstantní symboly, S, $-$ jsou unární funkční symboly, $+$, $\cdot$, $\wedge$, $\vee$ jsou binární funkční symboly, E, $\leq$ jsou binární relační symboly.

Termy

Jsou výrazy reprezentující hodnoty (složených) funkcí.

Termy jazyka L jsou dány induktivním předpisem

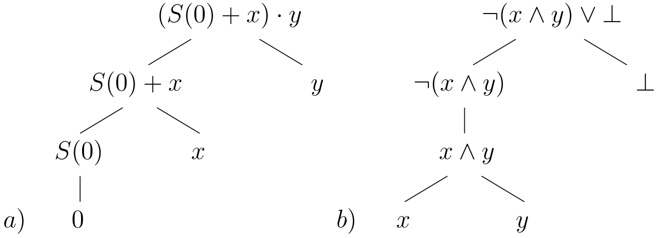
(i) každá proměnná nebo konstantní symbol je term,

(ii) je-li f funkční symbol jazyka L s aritou $n > 0$ a $t_0, \ldots, t_{n-1}$ jsou termy, pak je i výraz $f(t_0, \ldots, t_{n-1})$ term,

(iii) každý term vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii).

- *Konstantní (ground) term* je term bez proměnných, např. $f(0) + 1$.
- Množinu všech termů jazyka L značíme Term_L.
- Termu, jenž je součástí jiného termu t, říkáme *podterm* termu t.
- Strukturu termu můžeme reprezentovat jeho vytvořujícím stromem.
- U binárních funkčních symbolů často používáme infixního zápisu, např. píšeme $(x + y)$ namísto $+(x, y)$.

Příklady termů



$a)$ Vytvořující strom termu $(S(0)+x)\cdot y$ jazyka aritmetiky.

$b)$ Výrokové formule se spojkami $\neg$, $\wedge$, $\vee$, případně s konstantami $\top$, $\bot$ lze chápat jako termy jazyka Booleových algeber.

Atomické formule

Jsou nejjednodušší formule.

- *Atomická formule* jazyka L je výraz $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$, kde R je n-ární relační symbol jazyka L a $t_0, \ldots, t_{n-1}$ jsou termy jazyka L.
- Množinu všech atomických formulí jazyka L značíme AFm_L.
- Strukturu atomické formule můžeme reprezentovat vytvořujícím stromem z vytvořujících podstromů jejích termů.
- U binárních relačních symbolů často používáme infixního zápisu, např. $t_1 = t_2$ namísto $=(t_1, t_2)$ či $t_1 \leq t_2$ namísto $\leq(t_1, t_2)$.
- *Příklady atomických formulí*

$$Z(o(x), r), \quad x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y, \quad \neg(x \wedge y) \vee \bot = \bot.$$

Formule

Formule jazyka L jsou výrazy dané induktivním předpisem

(i) každá atomická formule jazyka L je formule,

(ii) jsou-li φ, ψ formule, pak i následující výrazy jsou formule

$$(\neg\varphi)\ ,(\varphi\wedge\psi)\ ,(\varphi\vee\psi)\ ,(\varphi\rightarrow\psi)\ ,(\varphi\leftrightarrow\psi),$$

(iii) je-li φ formule a x proměnná, jsou výrazy $((\forall x)\varphi)$ a $((\exists x)\varphi)$ formule.

(iv) každá formule vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (iii).

- Množinu všech formulí jazyka L značíme Fm_L.
- Formuli, jež je součástí jiné formule φ, nazveme *podformule* formule φ.
- Strukturu formule můžeme reprezentovat jejím vytvořujícím stromem.

Konvence zápisu

- Zavedení *priorit* binárních funkčních symbolů např. $+$, $\cdot$ umožňuje při infixním zápisu vypouštět závorky okolo podtermu vzniklého symbolem vyšší priority, např. $x \cdot y + z$ reprezentuje term $(x \cdot y) + z$.
- Zavedení *priorit* logických spojek a kvantifikátorů umožňuje vypouštět závorky okolo podformule vzniklé spojkou s vyšší prioritou.

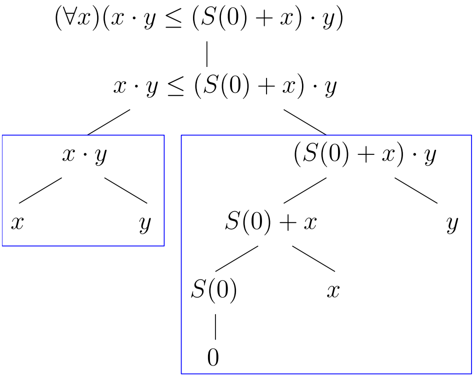
$$(1)\quad \to,\ \leftrightarrow \qquad (2)\quad \wedge,\ \vee \qquad (3)\quad \neg,\ (\forall x),\ (\exists x)$$

- Okolo podformulí vzniklých $\neg$, $(\forall x)$, $(\exists x)$ lze závorky vypustit vždy.
- Můžeme vypustit závorky i okolo $(\forall x)$ a $(\exists x)$ pro každé $x \in \mathrm{Var}$.
- Rovněž vnější závorky můžeme vynechat.

$$(((\neg((\forall x)R(x))) \wedge ((\exists y)P(y))) \to (\neg(((\forall x)R(x)) \vee (\neg((\exists y)P(y))))))$$

$$\neg(\forall x)R(x) \wedge (\exists y)P(y) \to \neg((\forall x)R(x) \vee \neg(\exists y)P(y))$$

Příklad formule



Vytvořující strom formule $(\forall x)(x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y)$.

Výskyt proměnné

Nechť φ je formule a x je proměnná.

- *Výskyt* proměnné x ve φ je list vytvořujícího stromu φ označený x.
- Výskyt x ve φ je *vázaný*, je-li součástí nějaké podformule ψ začínající kvantifikátorem $(\forall x)$ nebo $(\exists x)$. Není-li výskyt vázaný, je *volný*.
- Proměnná x je *volná* ve φ, pokud má volný výskyt ve φ.
  Je *vázaná* ve φ, pokud má vázaný výskyt ve φ.
- Proměnná x může být zároveň volná i vázaná ve φ. Např. ve formuli
  $$(\forall x)(\exists y)(x \leq y) \vee x \leq z.$$
- Zápis $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ značí, že $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné ve formuli φ.

Poznámka *Uvidíme, že pravdivostní hodnota formule (při dané interpretaci symbolů) závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.*

Otevřené a uzavřené formule

- Formule je *otevřená*, neobsahuje-li žádný kvantifikátor. Pro množinu OFm_L všech otevřených formulí jazyka L platí $\mathrm{AFm}_L \subsetneq \mathrm{OFm}_L \subsetneq \mathrm{Fm}_L$.
- Formule je *uzavřená* (*sentence*), pokud nemá žádnou volnou proměnnou, tj. všechny výskyty proměnných jsou vázané.
- Formule může být otevřená i uzavřená zároveň, pak všechny její termy jsou konstantní.

$x + y \leq 0$	*otevřená*, $\varphi(x, y)$
$(\forall x)(\forall y)(x + y \leq 0)$	*uzavřená (sentence)*,
$(\forall x)(x + y \leq 0)$	*ani otevřená, ani uzavřená*, $\varphi(y)$
$1 + 0 \leq 0$	*otevřená i uzavřená*

Poznámka *Uvidíme, že sentence má při dané interpretaci symbolů pevný význam, tj. její pravdivostní hodnota nezávisí na ohodnocení proměnných.*

Instance

Když do formule za volnou proměnnou x dosadíme term t, požadujeme, aby vzniklá formule říkala (nově) o termu t "totéž", co předtím říkala o proměnné x.

$\varphi(x)$	$(\exists y)(x+y=1)$	"*existuje prvek* $1-x$"
pro $t=1$ *lze* $\varphi(x/t)$	$(\exists y)(1+y=1)$	"*existuje prvek* $1-1$"
pro $t=y$ *nelze*	$(\exists y)(y+y=1)$	"1 *je dělitelné* 2"

- Term t je *substituovatelný* za proměnnou x ve formuli φ, pokud po současném nahrazení všech volných výskytů x za t nevznikne ve φ žádný vázaný výskyt proměnné z t.
- Pak vzniklou formuli značíme $\varphi(x/t)$ a zveme ji *instance* formule φ vzniklá *substitucí* termu t za proměnnou x do φ.
- t není substituovatelný za x do φ, právě když x má volný výskyt v nějaké podformuli φ začínající $(\forall y)$ nebo $(\exists y)$ pro nějakou proměnnou y z t.
- Konstantní termy jsou substituovatelné vždy.

Varianty

Kvantifikované proměnné lze (za určitých podmínek) přejmenovat tak, že vznikne ekvivalentní formule.

Nechť $(Qx)\psi$ je podformule ve φ, kde Q značí $\forall$ či $\exists$, a y je proměnná, tž.

1) y je substituovatelná za x do ψ, a
2) y nemá volný výskyt v ψ.

Nahrazením podformule $(Qx)\psi$ za $(Qy)\psi(x/y)$ vznikne *varianta* formule φ *v podformuli* $(Qx)\psi$. Postupnou variací jedné či více podformulí ve φ vznikne *varianta* formule φ. *Např.*

$(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$	*je formule* φ,
$(\exists u)(\forall v)(u \leq v)$	*je varianta* φ,
$(\exists y)(\forall y)(y \leq y)$	*není varianta* φ, *neplatí* $1)$,
$(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$	*není varianta* φ, *neplatí* $2)$.

Struktury - příklady

- $\underline{\mathcal{S}} = \langle S, \leq \rangle$ uspořádaná množina, kde $\leq$ je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní binární relace na S,
- $\underline{G} = \langle V, E \rangle$ neorientovaný graf bez smyček, kde V je množina *vrcholů*, E je ireflexivní, symetrická binární relace na V *(sousednost)*,
- $\underline{\mathbb{Z}_p} = \langle \mathbb{Z}_p, +, -, 0 \rangle$ grupa sčítání celých čísel modulo p,
- $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ těleso racionálních čísel.
- $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ potenční algebra nad množinou X,
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ standardní model aritmetiky (přirozených čísel),
- konečné automaty a další modely výpočtu,
- relační databáze, ...

Struktura pro jazyk

Nechť $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ je jazyk a A je neprázdná množina.

- *Realizace* (*interpretace*) *relačního symbolu* $R \in \mathcal{R}$ na A je libovolná relace $R^A \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$. Realizace rovnosti na A je relace Id_A (identita).
- *Realizace* (*interpretace*) *funkčního symbolu* $f \in \mathcal{F}$ na A je libovolná funkce $f^A \colon A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$. Realizace konstantního symbolu je tedy prvek z A.

Struktura pro jazyk L (*L-struktura*) je trojice $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$, kde

- A je neprázdná množina, zvaná *doména* (*univerzum*) struktury $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{R}^A = \langle R^A \mid R \in \mathcal{R} \rangle$ je soubor realizací relačních symbolů (relací),
- $\mathcal{F}^A = \langle f^A \mid f \in \mathcal{F} \rangle$ je soubor realizací funkčních symbolů (funkcí).

Strukturu pro jazyk L nazýváme také *model jazyka* L. Třída všech modelů jazyka L se značí $M(L)$. *Např. struktury pro jazyk* $L = \langle \leq \rangle$ *jsou*

$$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle,\ \langle \mathbb{Q}, > \rangle,\ \langle X, E \rangle \text{ pokud } X \neq \emptyset,\ \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle.$$

Hodnota termu

Nechť t je term jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura pro L.

- *Ohodnocení proměnných* v množině A je funkce $e\colon \mathrm{Var} \to A$.
- *Hodnota* $t^{\mathcal{A}}[e]$ termu t ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je dána induktivním předpisem

$$x^{\mathcal{A}}[e] = e(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathrm{Var},$$
$$(f(t_0, \ldots, t_{n-1}))^{\mathcal{A}}[e] = f^{A}(t_0^{\mathcal{A}}[e], \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{A}}[e]) \quad \text{pro každé } f \in \mathcal{F}.$$

- Speciálně, pro konstantní symbol c je $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{A}$.
- Je-li t konstantní term, jeho hodnota v $\mathcal{A}$ nezávisí na ohodnocení e.
- Hodnota termu v $\mathcal{A}$ závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných.

Např. hodnota termu $x + 1$ *ve struktuře* $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$ *při ohodnocení* e, *pro které* $e(x) = 2$, *je* $(x+1)^{\mathcal{N}}[e] = 6$.

Hodnota atomické formule

Nechť φ je atomická formule tvaru $R(t_0, \dots, t_{n-1})$ jazyka $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$ a $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura pro L.

- *Hodnota* $H_{at}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ formule φ ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je
$$H_{at}^{\mathcal{A}}(R(t_0, \dots, t_{n-1}))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_0^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_{n-1}^{\mathcal{A}}[e]) \in R^A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
přičemž $=^{\mathcal{A}}$ je Id_A, tj. $H_{at}^{\mathcal{A}}(t_0 = t_1)[e] = 1$ pokud $t_0^{\mathcal{A}}[e] = t_1^{\mathcal{A}}[e]$, jinak 0.
- Je-li φ sentence, tj. všechny její termy jsou konstantní, její hodnota v $\mathcal{A}$ nezávisí na ohodnocení e.
- Hodnota φ v $\mathcal{A}$ závisí pouze na ohodnocení jejích (volných) proměnných.

Např. hodnota formule φ *tvaru* $x + 1 \leq 1$ *ve struktuře* $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, 1, \leq \rangle$ *při ohodnocení* e *je* $H_{at}^{\mathcal{N}}(\varphi)[e] = 1$ *právě když* $e(x) = 0$.

Hodnota formule

Hodnota $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ formule φ ve struktuře $\mathcal{A}$ při ohodnocení e je

$$
\begin{aligned}
H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] &= H^{\mathcal{A}}_{at}(\varphi)[e] \;\; \text{pokud } \varphi \text{ je atomická,}\\
H^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] &= -_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e])\\
H^{\mathcal{A}}(\varphi \wedge \psi)[e] &= \wedge_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])\\
H^{\mathcal{A}}(\varphi \vee \psi)[e] &= \vee_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])\\
H^{\mathcal{A}}(\varphi \rightarrow \psi)[e] &= \rightarrow_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])\\
H^{\mathcal{A}}(\varphi \leftrightarrow \psi)[e] &= \leftrightarrow_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])\\
H^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] &= \min_{a\in A}(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])\\
H^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] &= \max_{a\in A}(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])
\end{aligned}
$$

kde $-_1$, $\wedge_1$, $\vee_1$, $\rightarrow_1$, $\leftrightarrow_1$ jsou Booleovské funkce dané tabulkami a $e(x/a)$ pro $a \in A$ značí ohodnocení získané z e nastavením $e(x) = a$.

Pozorování $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ *závisí pouze na ohodnocení volných proměnných ve* φ.

Platnost při ohodnocení

Formule φ *je pravdivá* (*platí*) *ve struktuře* $\mathcal{A}$ *při ohodnocení* e, pokud $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$. Pak píšeme $\mathcal{A} \models \varphi[e]$, v opačném případě $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$. Platí

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{A} \models \neg\varphi[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \not\models \varphi[e] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ a } \mathcal{A} \models \psi[e] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ nebo } \mathcal{A} \models \psi[e] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e] & \Leftrightarrow & \text{jestliže } \mathcal{A} \models \varphi[e], \text{ pak } \mathcal{A} \models \psi[e] \\
\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ právě když } \mathcal{A} \models \psi[e] \\
\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)] \text{ pro každé } a \in A \\
\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e] & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)] \text{ pro nějaké } a \in A
\end{array}
$$

Pozorování *Nechť term t je substituovatelný za proměnnou x do formule φ a formule ψ je varianta φ. Pak pro každou strukturu $\mathcal{A}$ a ohodnocení e platí*

1) $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$ *právě když* $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ *pro* $a = t^{\mathcal{A}}[e]$,
2) $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ *právě když* $\mathcal{A} \models \psi[e]$.