Výroková a predikátová logika - VII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2018/2019

Platnost ve struktuře

Nechť φ je formule jazyka L a $\mathcal{A}$ je struktura pro L.

- φ je *pravdivá* (*platí*) *ve struktuře* $\mathcal{A}$, značeno $\mathcal{A} \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení $e \colon \mathrm{Var} \to A$. V opačném případě píšeme $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
- φ je *lživá v* $\mathcal{A}$, pokud $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ pro každé $e \colon \mathrm{Var} \to A$.
- Pro každé formule φ, ψ, proměnnou x a strukturu $\mathcal{A}$ platí

$$\begin{array}{llcl}
(1) & \mathcal{A} \models \varphi & \Rightarrow & \mathcal{A} \not\models \neg\varphi \\
(2) & \mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \varphi \text{ a } \mathcal{A} \models \psi \\
(3) & \mathcal{A} \models \varphi \vee \psi & \Leftarrow & \mathcal{A} \models \varphi \text{ nebo } \mathcal{A} \models \psi \\
(4) & \mathcal{A} \models \varphi & \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models (\forall x)\varphi
\end{array}$$

- Je-li φ sentence, je φ pravdivá v $\mathcal{A}$ či lživá v $\mathcal{A}$ a tedy implikace (1) platí i obráceně. Je-li φ nebo ψ sentence, implikace (3) platí i obráceně.
- Z (4) plyne, že $\mathcal{A} \models \varphi$ právě když $\mathcal{A} \models \psi$, kde ψ je *generální uzávěr* φ, tj. formule $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$, v níž $x_1, \ldots, x_n$ jsou všechny volné proměnné φ.

Platnost v teorii a logická platnost

- *Teorie* jazyka L je libovolná množina T formulí jazyka L (tzv. *axiomů*).
- *Model teorie* T je L-struktura $\mathcal{A}$ taková, že $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$.
- *Třída modelů* teorie T je $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$.
- Formule φ je *pravdivá v T* (*platí v T*), značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každý model $\mathcal{A}$ teorie T. V opačném případě píšeme $T \not\models \varphi$.
- Formule φ je *lživá v T*, pokud $T \models \neg\varphi$, tj. je lživá v každém modelu T.
- Formule φ je *nezávislá v T*, pokud není pravdivá v T ani lživá v T.
- Je-li $T = \emptyset$, je $M(T) = M(L)$ a teorii T vynecháváme, případně říkáme *"v logice"*. Pak $\models \varphi$ značí, že φ je *pravdivá* ((*logicky*) *platí*, *tautologie*).
- *Důsledek* T je množina $\theta^L(T)$ všech sentencí jazyka L pravdivých v T, tj.
$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$

Příklad teorie

Teorie uspořádání T jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \leq x \qquad \text{(reflexivita)}$$

$$x \leq y \quad \wedge \quad y \leq x \quad \rightarrow \quad x = y \qquad \text{(antisymetrie)}$$

$$x \leq y \quad \wedge \quad y \leq z \quad \rightarrow \quad x \leq z \qquad \text{(tranzitivita)}$$

Modely T jsou L-struktury $\langle S, \leq_S \rangle$, tzv. uspořádané množiny, ve kterých platí axiomy T, např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ nebo $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- *Formule φ ve tvaru $x \leq y \vee y \leq x$ platí v $\mathcal{A}$, ale neplatí v $\mathcal{B}$, neboť např. $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ při ohodnocení $e(x) = \{0\}, e(y) = \{1\}$, je tedy nezávislá v T.*
- *Sentence ψ ve tvaru $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ je pravdivá v $\mathcal{B}$ a lživá v $\mathcal{A}$, je tedy rovněž nezávislá v T. Píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$.*
- *Formule χ ve tvaru $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ je pravdivá v T, píšeme $T \models \chi$, totéž platí pro její generální uzávěr.*

Nesplnitelnost a pravdivost

Problém pravdivosti v teorii lze převést na problém existence modelu.

Tvrzení *Pro každou teorii T a sentenci φ (stejného jazyka)*

$$T, \neg\varphi \text{ nemá model} \quad \Leftrightarrow \quad T \models \varphi.$$

Důkaz Z definic plynou ekvivalence následujících tvrzení.

(1) $T, \neg\varphi$ nemá model,

(2) $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu teorie T,

(3) φ platí v každém modelu teorie T,

(4) $T \models \varphi$. $\square$

Poznámka *Předpoklad, že φ je sentence, je nutný pro $(2) \Rightarrow (3)$.*

Např. teorie $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model, ale $P(c) \not\models P(x)$, kde P je unární relační symbol a c je konstantní symbol.

Základní algebraické teorie - příklady

- *Teorie grup* nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností má axiomy

  $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativita $+$)

  $0 + x = x = x + 0$ (neutralita 0 k $+$)

  $x + (-x) = 0 = (-x) + x$ ($-x$ je inverzní prvek k x)

- *Teorie komutativních grup* má navíc ax. $x + y = y + x$ (komutativita $+$)

- *Teorie okruhů* je jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ s rovností, má navíc axiomy

  $1 \cdot x = x = x \cdot 1$ (neutralita 1 k $\cdot$)

  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (asociativita $\cdot$)

  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributivita $\cdot$ k $+$)

- *Teorie komutativních okruhů* má navíc ax. $x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita $\cdot$)

- *Teorie těles* stejného jazyka má navíc axiomy

  $x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1)$ (existence inverzního prvku k $\cdot$)

  $0 \neq 1$ (netrivialita)

Vlastnosti teorií

Teorie T jazyka L je *(sémanticky)*

- *sporná*, jestliže v ní platí $\perp$ (spor), jinak je *bezesporná* (*splnitelná*),
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá sentence je v ní pravdivá či lživá,
- *extenze* teorie T' jazyka L', jestliže $L' \subseteq L$ a $\theta^{L'}(T') \subseteq \theta^{L}(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $L = L'$, a *konzervativní*, pokud $\theta^{L'}(T') = \theta^{L}(T) \cap \mathrm{Fm}_{L'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T,

Struktury $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ pro jazyk L jsou *elementárně ekvivalentní*, značeno $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, platí-li v nich stejné formule.

Pozorování *Nechť T a T' jsou teorie jazyka L. Teorie T je (sémanticky)*

(1) *bezesporná, právě když má model,*

(2) *kompletní, právě když má až na elementární ekvivalenci jediný model,*

(3) *extenze T', právě když $M(T) \subseteq M(T')$,*

(4) *ekvivalentní s T', právě když $M(T) = M(T')$.*

Podstruktura

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^B, \mathcal{F}^B \rangle$ jsou struktury pro jazyk $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$.

Řekneme, že $\mathcal{B}$ je (indukovaná) *podstruktura* $\mathcal{A}$, značeno $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, pokud

- (i) $B \subseteq A$,
- (ii) $R^B = R^A \cap B^{\mathrm{ar}(R)}$ pro každé $R \in \mathcal{R}$,
- (iii) $f^B = f^A \cap (B^{\mathrm{ar}(f)} \times B)$, tj. $f^B = f^A \restriction B^{\mathrm{ar}(f)}$, pro každé $f \in \mathcal{F}$.

Pozorování *Množina $C \subseteq A$ je doménou nějaké podstruktury struktury $\mathcal{A}$, právě když C je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant).*

- Pak příslušnou podstrukturu značíme $\mathcal{A} \restriction C$ a říkáme, že je to *restrikce* (*parcializace*) struktury $\mathcal{A}$ na C.
- Množina $C \subseteq A$ je *uzavřená* na funkci $f \colon A^n \to A$, pokud $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in C$ pro každé $x_0, \ldots, x_{n-1} \in C$.

Např. $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je podstrukturou* $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ *a lze psát* $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{Z}$. *Dále* $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je jejich podstrukturou a* $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \restriction \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \restriction \mathbb{N}$.

Platnost v podstruktuře

Nechť $\mathcal{B}$ je podstruktura struktury $\mathcal{A}$ pro (pevný) jazyk L.

Tvrzení *Pro každou otevřenou formuli φ a ohodnocení $e\colon \mathrm{Var} \to B$ platí*

$$\mathcal{B} \models \varphi[e] \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \varphi[e].$$

Důkaz Je-li φ atomická, plyne tvrzení z definice platnosti při ohodnocení. Dále snadno indukcí dle struktury formule. $\square$

Důsledek *Otevřená formule platí ve struktuře $\mathcal{A}$, právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.*

- Teorie T je *otevřená*, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek *Každá podstruktura modelu otevřené teorie T je modelem T.*

Např. každá podstruktura grafu, tj. modelu teorie grafů, je rovněž grafem, zveme ho podgraf. Obdobně např. podgrupa nebo Booleova podalgebra.

Generovaná podstruktura, expanze, redukt

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura a $X \subseteq A$. Označme B nejmenší podmnožinu množiny A obsahující X, která je uzavřená na všechny funkce struktury $\mathcal{A}$ (včetně konstant). Pak strukturu $\mathcal{A} \restriction B$ značíme rovněž $\mathcal{A}\langle X \rangle$ a podstruktura říkáme, že je to $\mathcal{A}$ *generovaná* množinou X.

Např. pro $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ *a* $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ *je* $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{1\} \rangle = \underline{\mathbb{N}}$, $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{-1\} \rangle = \underline{\mathbb{Z}}$ *a* $\underline{\mathbb{Q}}\langle \{2\} \rangle$ *je podstruktura na všech sudých přirozených číslech.*

Nechť $\mathcal{A}'$ je struktura pro jazyk L' a $L \subseteq L'$ je jazyk. Odebráním realizací symbolů, jež nejsou v L, získáme z $\mathcal{A}'$ strukturu $\mathcal{A}$, kterou nazýváme *redukt* struktury $\mathcal{A}'$ na jazyk L. Obráceně, $\mathcal{A}'$ je *expanze* struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L'.

Např. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ *je redukt* $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$. *Naopak, struktura* $\langle \mathbb{N}, +, c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ *taková, že* $c_i = i$ *pro všechna* $i \in \mathbb{N}$, *je expanze* $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ *o jména prvků z* $\mathbb{N}$.

Věta o konstantách

Věta *Nechť φ je formule jazyka L s volnými proměnnými $x_1, \dots, x_n$ a T je teorie jazyka L. Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ a T' teorii T nad jazykem L'. Pak*

$$T \models \varphi \quad \textit{právě když} \quad T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

Důkaz ($\Rightarrow$) Je-li $\mathcal{A}'$ model teorie T', nechť $\mathcal{A}$ je redukt $\mathcal{A}'$ na L. Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení e, platí i

$$\mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/c_1^{A'}, \dots, x_n/c_n^{A'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

($\Leftarrow$) Je-li $\mathcal{A}$ model teorie T a e ohodnocení, nechť $\mathcal{A}'$ je expanze $\mathcal{A}$ na L' o konstanty $c_i^{A'} = e(x_i)$ pro všechna i. Jelikož $\mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)[e']$ pro libovolné ohodnocení e', platí i

$$\mathcal{A}' \models \varphi[e(x_1/c_1^{A'}, \dots, x_n/c_n^{A'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A} \models \varphi[e]. \quad \square$$

Definovatelné množiny

Zajímá nás, které množiny lze v dané struktuře zadefinovat.

- *Množina definovaná formulí* $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ *ve struktuře* $\mathcal{A}$ je množina
$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1,\dots,x_n)=\{(a_1,\dots,a_n)\in A^n \mid \mathcal{A}\models\varphi[e(x_1/a_1,\dots,x_n/a_n)]\}.$$
Zkráceným zápisem, $\varphi^{\mathcal{A}}(\overline{x})=\{\overline{a}\in A^{|\overline{x}|}\mid\mathcal{A}\models\varphi[e(\overline{x}/\overline{a})]\}$, kde $|\overline{x}|=n$.
- *Množina definovaná formulí* $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ *s parametry* $\overline{b}\in A^{|\overline{y}|}$ *ve struktuře* $\mathcal{A}$ je
$$\varphi^{\mathcal{A},\overline{b}}(\overline{x},\overline{y})=\{\overline{a}\in A^{|\overline{x}|}\mid\mathcal{A}\models\varphi[e(\overline{x}/\overline{a},\overline{y}/\overline{b})]\}.$$
Např. pro $\varphi=E(x,y)$ *je* $\varphi^{\mathcal{G},b}(x,y)$ *množina sousedů vrcholu* b *v grafu* $\mathcal{G}$.
- Pro strukturu $\mathcal{A}$, množinu $B\subseteq A$ a $n\in\mathbb{N}$ označme $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A},B)$ třídu všech množin $D\subseteq A^n$ definovatelných ve struktuře $\mathcal{A}$ s parametry z B.

Pozorování $\mathrm{Df}^n(\mathcal{A},B)$ *je uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik a obsahuje* $\emptyset$, A^n. *Tedy tvoří podalgebru potenční algebry* $\mathcal{P}(A^n)$.

Příklad - databázové dotazy

Filmy	*název*	*režisér*	*herec*
	Lidé z Maringotek	M. Frič	J. Tříska
	Po strništi bos	J. Svěrák	Z. Svěrák
	Po strništi bos	J. Svěrák	J. Tříska
	...	...	...

Program	*kino*	*název*	*čas*
	Světozor	Po strništi bos	13:15
	Mat	Po strništi bos	16:15
	Mat	Lidé z Maringotek	18:30
	...	...	...

Kde a kdy mohu dnes vidět film s Janem Třískou?

select *Program.kino, Program.čas* **from** *Filmy, Program*
where *Filmy.název* = *Program.název* **and** *herec* = 'J. Tříska';

Totéž dostaneme jako množinu $\varphi^{\mathcal{D}}(x,y)$ definovanou formulí $\varphi(x,y)$

$$(\exists n)(\exists r)(P(x,n,y) \wedge F(n,r,\text{'J. Tříska'}))$$

ve struktuře $\mathcal{D} = \langle D, \mathit{Filmy}, \mathit{Program}, c^D\rangle_{c\in D}$ jazyka $L = \langle F, P, c\rangle_{c\in D}$, kde $D = \{$'Po strništi bos', 'J. Tříska', 'Mat', '13:15', $\ldots\}$ a $c^D = c$ pro každé $c \in D$.

Booleovy algebry

Teorie *Booleových algeber* jazyka $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ s rovností má axiomy

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad \text{(asociativita } \wedge)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad \text{(asociativita } \vee)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad \text{(komutativita } \wedge)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad \text{(komutativita } \vee)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \text{(distributivita } \wedge \text{ k } \vee)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad \text{(distributivita } \vee \text{ k } \wedge)$$

$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x \qquad \text{(absorbce)}$$

$$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0 \qquad \text{(komplementace)}$$

$$0 \neq 1 \qquad \text{(netrivialita)}$$

Nejmenší model je $\underline{2} = \langle 2, -_1, \wedge_1, \vee_1, 0, 1\rangle$. Konečné Booleovy algebry jsou (až na izomorfismus) právě $\underline{^n2} = \langle {}^n2, -_n, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n\rangle$ pro $n \in \mathbb{N}^+$, kde jednotlivé operace *(na binárních n-ticích)* jsou operace z $\underline{2}$ *"po složkách"*.

Vztah výrokové a predikátové logiky

- Výrokové formule s (*univerzálními*) spojkami $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (případně s $\top$, $\bot$) lze považovat za Booleovské termy. Hodnota výroku φ při daném ohodnocení je pak hodnotou termu v Booleově algebře $\underline{2}$.
- Algebra výroků nad $\mathbb{P}$ je Booleova algebra (i pro $\mathbb{P}$ nekonečné).
- Reprezentujeme-li atomické formule v otevřené formuli φ (bez rovnosti) pomocí prvovýroků, získame výrokovou formuli, která je pravdivá, právě když φ je pravdivá.
- Výrokovou logiku lze zavést jako fragment predikátové logiky pomocí nulárních relačních symbolů (*syntax*) a nulárních relací (*sémantika*), přičemž $A^0 = \{\emptyset\} = 1$ a tedy $R^A \subseteq A^0$ je $R^A = \emptyset = 0$ anebo $R^A = \{\emptyset\} = 1$.