Výroková a predikátová logika - XII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2018/2019

Obecné rezoluční pravidlo

Nechť klauzule C_1, C_2 neobsahují stejnou proměnnou a jsou ve tvaru

$$C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}, \quad C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\},$$

kde $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ lze unifikovat a $n, m \geq 1$. Pak klauzule

$$C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma,$$

kde σ je nejobecnější unifikace pro S, je *rezolventa* klauzulí C_1 a C_2.

Např. v klauzulích $\{P(x), Q(x, z)\}$ *a* $\{\neg P(y), \neg Q(f(y), y)\}$ *lze unifikovat* $S = \{Q(x, z), Q(f(y), y)\}$ pomocí nejobecnější unifikace $\sigma = \{x/f(y), z/y\}$ a získat z nich rezolventu $\{P(f(y)), \neg P(y)\}$.

Poznámka *Podmínce o různých proměnných lze vyhovět přejmenováním proměnných v rámci klauzule. Je to nutné, např. z* $\{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ *lze po přejmenování získat* $\square$*, ale* $\{P(x), P(f(x))\}$ *nelze unifikovat.*

Lifting lemma

Rezoluční důkaz na úrovni VL lze "zdvihnout" na úroveň PL.

Lemma *Nechť $C_1^* = C_1\tau_1$, $C_2^* = C_2\tau_2$ jsou základní instance klauzulí C_1, C_2 neobsahujících stejnou proměnnou a C^* je rezolventa C_1^* a C_2^*. Pak existuje rezolventa C klauzulí C_1 a C_2 taková, že $C^* = C\tau_1\tau_2$ je základní instance C.*

Důkaz Předpokládejme, že C^* je rezolventa C_1^*, C_2^* přes literál $P(t_1, \ldots, t_k)$.

- Pak lze psát $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}$ a $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$, kde $\{A_1, \ldots, A_n\}\tau_1 = \{P(t_1, \ldots, t_k)\}$ a $\{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}\tau_2 = \{\neg P(t_1, \ldots, t_k)\}$.
- Tedy $(\tau_1\tau_2)$ unifikuje $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ a je-li σ mgu pro S z unifikačního algoritmu, pak $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ je rezolventa C_1 a C_2.
- Navíc $(\tau_1\tau_2) = \sigma(\tau_1\tau_2)$ z vlastnosti $(*)$ pro σ a tedy

$$\begin{aligned} C\tau_1\tau_2 &= (C_1'\sigma \cup C_2'\sigma)\tau_1\tau_2 = C_1'\sigma\tau_1\tau_2 \cup C_2'\sigma\tau_1\tau_2 = C_1'\tau_1 \cup C_2'\tau_2 \\ &= (C_1 \setminus \{A_1, \ldots, A_n\})\tau_1 \cup (C_2 \setminus \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\})\tau_2 \\ &= (C_1^* \setminus \{P(t_1, \ldots, t_k)\}) \cup (C_2^* \setminus \{\neg P(t_1, \ldots, t_k)\}) = C^*. \quad \square \end{aligned}$$

Úplnost

Důsledek *Nechť S' je množina všech základních instancí klauzulí formule S. Je-li $S' \vdash_R C'$ (na úrovni VL), kde C' je základní klauzule, pak existuje klauzule C a základní substituce σ t.ž. $C' = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (na úrovni PL).*

Důkaz Indukcí dle délky rezolučního odvození pomocí lifting lemmatu. $\square$

Věta (úplnost) *Je-li formule S nesplnitelná, je $S \vdash_R \square$.*

Důkaz Je-li S nesplnitelná, dle (důsledku) Herbrandovy věty je nesplnitelná i množina S' všech základních instancí klauzulí z S.

- Dle úplnosti rezoluční metody ve VL je $S' \vdash_R \square$ (na úrovni VL).
- Dle předchozího důsledku existuje klauzule C a substituce σ taková, že $\square = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (na úrovni PL).
- Jediná klauzule, jejíž instance je $\square$, je klauzule $C = \square$. $\blacksquare$

Lineární rezoluce

Stejně jako ve VL, rezoluční metodu lze značně omezit (bez ztráty úplnosti).

- *Lineární důkaz* klauzule C z formule S je konečná posloupnost dvojic $(C_0, B_0), \ldots, (C_n, B_n)$ t.ž. C_0 je varianta klauzule v S a pro každé $i \leq n$
  - $i)$ B_i je varianta klauzule z S nebo C_j pro nějaké $j < i$, a
  - $ii)$ C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i, kde $C_{n+1} = C$.
- C je *lineárně dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_L C$, má-li lineární důkaz z S.
- *Lineární zamítnutí* S je lineární důkaz $\square$ z S.
- S je *lineárně zamítnutelná*, pokud $S \vdash_L \square$.

Věta *S je lineárně zamítnutelná, právě když S je nesplnitelná.*

Důkaz $(\Rightarrow)$ Každý lineární důkaz lze transformovat na rezoluční důkaz.
$(\Leftarrow)$ Plyne z úplnosti lineární rezoluce ve VL (nedokazováno), neboť lifting lemma zachovává linearitu odvození. $\square$

LI-rezoluce

Stejně jako ve VL, pro Hornovy formule můžeme lineární rezoluci dál omezit.

- *LI-rezoluce* (*"linear input"*) z formule S je lineární rezoluce z S, ve které je každá boční klauzule B_i variantou klauzule ze (vstupní) formule S.
- Je-li klauzule C dokazatelná LI-rezolucí z S, píšeme $S \vdash_{LI} C$.

- *Hornova formule* je množina (i nekonečná) Hornových klauzulí.
- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál.
- *Fakt* je (Hornova) klauzule $\{p\}$, kde p je pozitivní literál.
- *Pravidlo* je (Hornova) klauzule s právě jedním pozitivním a aspoň jedním negativním literálem. Pravidla a fakta jsou *programové klauzule*.
- *Cíl* je neprázdná (Hornova) klauzule bez pozitivního literálu.

Věta *Je-li Hornova T splnitelná a $T \cup \{G\}$ nesplnitelná pro cíl G, lze $\square$ odvodit LI-rezolucí z $T \cup \{G\}$ začínající G.*

Důkaz Plyne z Herbrandovy věty, stejné věty ve VL a lifting lemmatu. $\square$

Program v Prologu

Program (v Prologu) je Hornova formule obsahující pouze programové klauzule, tj. fakta nebo pravidla.

$syn(X,Y) :- otec(Y,X), muz(X).$	$\{syn(X,Y), \neg otec(Y,X), \neg muz(X)\}$
$syn(X,Y) :- matka(Y,X), muz(X).$	$\{syn(X,Y), \neg matka(Y,X), \neg muz(X)\}$
$muz(jan).$	$\{muz(jan)\}$
$otec(jiri, jan).$	$\{otec(jiri, jan)\}$
$matka(julie, jan).$	$\{matka(julie, jan)\}$

$?- syn(jan, X)$ $\quad$ $P \models (\exists X) syn(jan, X)$? $\quad$ $\{\neg syn(jan, X)\}$

Zajímá nás, zda daný existenční dotaz vyplývá z daného programu.

Důsledek *Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ v proměnných $X_1, \ldots, X_m$*

(1) $P \models (\exists X_1) \ldots (\exists X_m)(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$, *právě když*

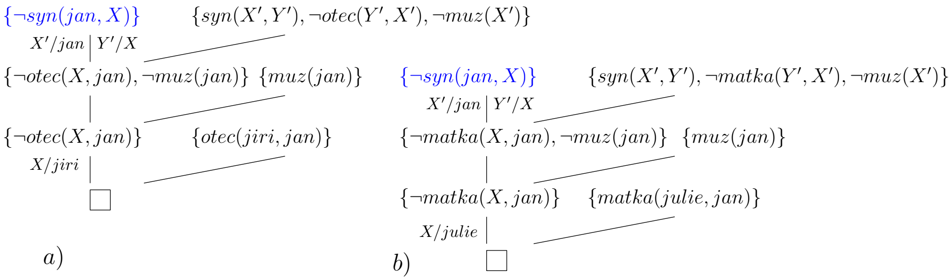
(2) $\square$ *lze odvodit LI-rezolucí z $P \cup \{G\}$ začínající (variantou) cíle G.*

LI-rezoluce nad programem

Je-li odpoveď na dotaz kladná, chceme navíc znát výstupní substituci.

Výstupní substituce σ LI-rezoluce $\square$ z $P \cup \{G\}$ začínající $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ je složení mgu v jednotlivých krocích (jen na proměnné v G). Platí,

$$P \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\sigma.$$



Výstupní substituce $a)$ $X = jiri$, $b)$ $X = julie$.

Hilbertovský kalkul

- základní logické spojky a kvantifikátory: $\neg$, $\rightarrow$, $(\forall x)$ (ostatní odvozené)
- dokazují se libovolné formule (nejen sentence)
- *logické axiomy* (schémata logických axiomů)

$$
\begin{array}{rll}
(i) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \\
(ii) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) & \\
(iii) & (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \\
(iv) & (\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t) & \text{je-li } t \text{ substituovatelný za } x \text{ do } \varphi \\
(v) & (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi) & \text{není-li } x \text{ volná proměnná ve } \varphi
\end{array}
$$

kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule (daného jazyka), t je libovolný term a x je libovolná proměnná.

- je-li jazyk s rovností, mezi logické axiomy patří navíc axiomy rovnosti
- *odvozovací (deduktivní) pravidla*

$$\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad \text{(modus ponens)}, \qquad \frac{\varphi}{(\forall x)\varphi} \quad \text{(generalizace)}$$

Pojem důkazu

Důkaz (*Hilbertova stylu*) formule φ z teorie T je konečná posloupnost $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ formulí taková, že pro každé $i \leq n$

- φ_i je logický axiom nebo $\varphi_i \in T$ (axiom teorie), nebo
- φ_i lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacích pravidel.

Formule φ je *dokazatelná* v T, má-li důkaz z T, značíme $T \vdash_H \varphi$.

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, $T \vdash_H \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz

- Je-li $\varphi \in T$ nebo logický axiom, je $T \models \varphi$ (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, pak $T \models \psi$, *tj. modus ponens je korektní*,
- jestliže $T \models \varphi$, pak $T \models (\forall x)\varphi$, *tj. pravidlo generalizace je korektní*,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T. $\square$

Poznámka *Platí i úplnost, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$ pro každou teorii T a formuli φ.*

Teorie struktury

Mnohdy nás zajímá, co platí v jedné konkrétní struktuře.

Teorie struktury $\mathcal{A}$ je množina $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ sentencí (stejného jazyka) platných v $\mathcal{A}$.

Pozorování *Pro každou strukturu* $\mathcal{A}$ *a teorii* T *jazyka* L*,*

(i) $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *je kompletní teorie,*

(ii) *je-li* $\mathcal{A} \models T$*, je* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *jednoduchá (kompletní) extenze teorie* T*,*

(iii) *je-li* $\mathcal{A} \models T$ *a* T *je kompletní, je* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ *ekvivalentní s* T*,*
tj. $\theta^L(T) = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

Např. pro $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ *je* $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ *aritmetika přirozených čísel.*

Poznámka *Později uvidíme, že ačkoliv je* $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ *kompletní teorie, je (algoritmicky) nerozhodnutelná.*

Elementární ekvivalence

- Struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jazyka L jsou *elementárně ekvivalentní*, psáno $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, pokud v nich platí stejné formule (jazyka L), tj. $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$.

  Např. $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$*, ale* $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$*, neboť v* $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ *má každý prvek bezprostředního následníka, zatímco v* $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ *ne.*

- T je kompletní, právě když má až na el. ekvivalenci právě jeden model.

  Např. teorie DeLO *hustých lineárních uspořádání bez konců je kompletní.*

Zajímá nás, jak vypadají modely dané teorie (až na elementární ekvivalenci).

Pozorování *Pro modely* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *teorie* T *platí* $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$*, právě když* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}), \mathrm{Th}(\mathcal{B})$ *jsou ekvivalentní (jednoduché kompletní extenze teorie* T*).*

Poznámka *Lze-li efektivně (algoritmicky) popsat pro efektivně danou teorii* T*, jak vypadají všechny její kompletní extenze, je* T *(algoritmicky) rozhodnutelná.*

Jednoduché kompletní extenze - příklad

Teorie $DeLO^*$ hustého lineárního uspořádání jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností je

$$x \leq x \qquad \text{(reflexivita)}$$
$$x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \rightarrow \ x = y \qquad \text{(antisymetrie)}$$
$$x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \rightarrow \ x \leq z \qquad \text{(tranzitivita)}$$
$$x \leq y \ \vee \ y \leq x \qquad \text{(dichotomie)}$$
$$x < y \ \rightarrow \ (\exists z)\ (x < z \ \wedge \ z < y) \qquad \text{(hustota)}$$
$$(\exists x)(\exists y)(x \neq y) \qquad \text{(netrivialita)}$$

kde '$x < y$' je zkratka za '$x \leq y \ \wedge \ x \neq y$'.

Označme φ, ψ sentence $(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$, resp. $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$. Uvidíme, že

$$\begin{aligned} DeLO &= DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\}, & DeLO^{\pm} &= DeLO^* \cup \{\varphi, \psi\}, \\ DeLO^{+} &= DeLO^* \cup \{\neg\varphi, \psi\}, & DeLO^{-} &= DeLO^* \cup \{\varphi, \neg\psi\} \end{aligned}$$

jsou všechny (neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie $DeLO^*$.

Důsledek Löwenheim-Skolemovy věty

Pomocí kanonického modelu (s rovností) jsme dříve dokázali následující větu.

Věta *Nechť T je bezesporná teorie spočetného jazyka L. Je-li L bez rovnosti, má T model, který je spočetně nekonečný. Je-li L s rovností, má T model, který je spočetný.*

Důsledek *Ke každé struktuře $\mathcal{A}$ spočetného jazyka bez rovnosti existuje spočetně nekonečná elementárně ekvivalentní struktura $\mathcal{B}$.*

Důkaz Teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ je bezesporná, neboť má model $\mathcal{A}$. Dle předchozí věty má spočetně nek. model $\mathcal{B}$. Jelikož je teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ kompletní, je $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. $\square$

Důsledek *Ke každé nekonečné struktuře $\mathcal{A}$ spočetného jazyka s rovností existuje spočetně nekonečná elementárně ekvivalentní struktura $\mathcal{B}$.*

Důkaz Obdobně jako výše. Jelikož v $\mathcal{A}$ neplatí sentence *"existuje právě n prvků"* pro žádné $n \in \mathbb{N}$ a $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, není B konečná, tedy je nekonečná. $\square$

Spočetné algebraicky uzavřené těleso

Řekneme, že těleso $\mathcal{A}$ je *algebraicky uzavřené*, pokud v něm každý polynom (nenulového stupně) má kořen, tj. pro každé $n \geq 1$ platí

$$\mathcal{A} \models (\forall x_{n-1}) \ldots (\forall x_0)(\exists y)(y^n + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + \cdots + x_1 \cdot y + x_0 = 0)$$

kde y^k je zkratka za term $y \cdot y \cdot \cdots \cdot y$ ($\cdot$ aplikováno $(k-1)$-krát).

Např. těleso $\underline{\mathbb{C}} = \langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je algebraicky uzavřené, zatímco tělesa $\underline{\mathbb{R}}$ a $\underline{\mathbb{Q}}$ nejsou (neboť polynom $x^2 + 1$ v nich nemá kořen).

Důsledek *Existuje spočetné algebraicky uzavřené těleso.*

Důkaz Dle předchozího důsledku existuje spočetná struktura (nekonečná), která je elementárně ekvivalentní s tělesem $\underline{\mathbb{C}}$, tedy je to rovněž algebraicky uzavřené těleso. $\square$