

Výroková a predikátová logika - XIII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2018/2019

Izomorfismus struktur

Nechť \mathcal{A} , \mathcal{B} jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$.

- **Bijekce** $h: A \rightarrow B$ je **izomorfismus** struktur \mathcal{A} a \mathcal{B} , pokud platí zároveň
 - $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$
pro každý n -ární funkční symbol $f \in \mathcal{F}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$,
 - $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$
pro každý n -ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ a každé $a_1, \dots, a_n \in A$.
- \mathcal{A} a \mathcal{B} jsou **izomorfní** (via h), psáno $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$), pokud existuje izomorfismus h struktur \mathcal{A} a \mathcal{B} . Říkáme rovněž, že \mathcal{A} je **izomorfní s** \mathcal{B} .
- **Automorfismus** struktury \mathcal{A} je izomorfismus \mathcal{A} s \mathcal{A} .

Např. **potenční algebra** $\underline{\mathcal{P}(X)} = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$ s $X = n$ je **izomorfní s Booleovou algebrou** $\underline{n2} = \langle {}^n2, -, \wedge_n, \vee_n, \mathbf{0}_n, \mathbf{1}_n \rangle$ via $h: A \mapsto \chi_A$, kde χ_A je **charakteristická funkce množiny** $A \subseteq X$.

Izomorfismus a sémantika

Uvidíme, že izomorfismus zachovává sémantiku.

Tvrzení Necht' \mathcal{A}, \mathcal{B} jsou struktury jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. Bijekce $h: A \rightarrow B$ je **izomorfismus** \mathcal{A} a \mathcal{B} , právě když platí zároveň

- (i) $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$ pro každý term t a $e: \text{Var} \rightarrow A$,
- (ii) $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$ pro každou formuli φ a $e: \text{Var} \rightarrow A$.

Důkaz (\Rightarrow) Indukcí dle struktury termu t , respektive formule φ .

(\Leftarrow) Dosazením termu $f(x_1, \dots, x_n)$ do (i) či atomické formule $R(x_1, \dots, x_n)$ do (ii) pro ohodnocení $e(x_i) = a_i$ máme, že h vyhovuje def. izomorfismu. \square

Důsledek Pro každé struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} stejného jazyka,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Poznámka Obrácená implikace **obecně** neplatí, např. $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, ale $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, neboť $|\mathbb{Q}| = \omega$ a $|\mathbb{R}| = 2^\omega$.

Konečné modely s rovností

Tvrzení Pro každé *konečné* struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} stejného jazyka s *rovností*,

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

Důkaz Je $|A| = |B|$, neboť lze vyjádřit “*existuje právě n prvků*”.

- Nechť \mathcal{A}' je expanze \mathcal{A} do jazyka $L' = L \cup \{c_a\}_{a \in A}$ o **jména prvků** z A .
- Ukážeme, že \mathcal{B} lze expandovat na \mathcal{B}' do jazyka L' tak, že $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$. Pak zřejmě $h: a \mapsto c_a^{B'}$ je izomorfismus \mathcal{A}' s \mathcal{B}' a tedy i izomorfismus \mathcal{A} s \mathcal{B} .
- Stačí ukázat, že pro každé $c_a^{A'} = a \in A$ existuje $b \in B$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$.
- Označme Ω množinu formulí $\varphi(x)$ t.ž. $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$, tj. $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$.
- Jelikož je A konečné, existuje konečně formulí $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ tak, že pro každé $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$ pro nějaké i .
- Jelikož $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \models (\exists x) \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i$, existuje $b \in B$ t.ž. $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i[e(x/b)]$.
- Tedy pro každou $\varphi \in \Omega$ je $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$, tj. $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$. \square

Důsledek Má-li *kompletní* teorie jazyka s *rovností* *konečný* model, jsou *všechny její modely izomorfní*.

Definovatelnost a automorfismy

Množina definovaná formulí $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ s parametry $\bar{b} \in A^{|\bar{y}|}$ ve struktuře \mathcal{A} je

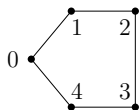
$$\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}.$$

Tvrzení Necht' $D \subseteq A^n$ je množina definovatelná ve struktuře \mathcal{A} z parametrů \bar{b} a h je **automorfismus** \mathcal{A} , který je **identický** na \bar{b} . Pak $h[D] = D$.

Důkaz Necht' $D = \varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$. Pak pro každé $\bar{a} \in A^{|\bar{x}|}$

$$\begin{aligned} \bar{a} \in D &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/h(\bar{b}))] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/\bar{b})] \Leftrightarrow h(\bar{a}) \in D. \end{aligned}$$

Např. graf \mathcal{G} má právě jeden netrivi. automorfismus h zachovávající vrchol 0.



$$h(0) = 0, \quad h(1) = 4, \quad h(2) = 3, \quad h(3) = 2, \quad h(4) = 1$$

$$\{0\} = (x = y)^{\mathcal{G}, 0}, \quad \{1, 4\} = (E(x, y))^{\mathcal{G}, 0}, \quad \{2, 3\} = (x \neq y \wedge \neg E(x, y))^{\mathcal{G}, 0}$$

Navíc množiny $\{0\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ jsou definovatelné z parametru 0. Tedy

$$\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}.$$

Kategoričnost

- *Izomorfní spektrum* teorie T je počet $I(\kappa, T)$ navzájem neizomorfních modelů teorie T pro každou **kardinalitu** κ .
- Teorie T je κ -*kategoričná*, pokud má až na izomorfismus právě jeden model kardinality κ , tj. $I(\kappa, T) = 1$.

Tvrzení Teorie DeLO (tj. “bez konců”) je ω -kategoričná.

Důkaz Necht' $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DeLO}$ s $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $B = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Indukcí dle n lze nalézt prosté **parciální** funkce $h_n \subseteq h_{n+1} \subset A \times B$ **zachovávající uspořádání** tak, že $\{a_i\}_{i < n} \subseteq \text{dom}(h_n)$ a $\{b_i\}_{i < n} \subseteq \text{rng}(h_n)$. Pak $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ via $h = \cup h_n$. \square

Obdobně dostaneme, že např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\mathcal{A} \upharpoonright (0, 1]$, $\mathcal{A} \upharpoonright [0, 1)$, $\mathcal{A} \upharpoonright [0, 1]$ jsou až na izomorfismus všechny spočetné modely teorie DeLO. Pak*

$$I(\kappa, \text{DeLO}^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}, \\ 4 & \text{pro } \kappa = \omega. \end{cases}$$

ω -kategorické kritérium kompletnosti

Věta *Nechť jazyk L je spočetný.*

- (i) Je-li teorie T jazyka L bez rovnosti ω -kategorická, je kompletní.*
- (ii) Je-li teorie T jazyka L s rovností ω -kategorická a bez konečného modelu, je kompletní.*

Důkaz Každý model teorie T je elementárně ekvivalentní s nějakým spočetně nekonečným modelem T , ale ten je až na izomorfismus jediný. Tedy všechny modely T jsou elementárně ekvivalentní, tj. T je kompletní. \square

Např. teorie $DeLO$, $DeLO^+$, $DeLO^-$, $DeLO^\pm$ jsou kompletní a jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie $DeLO^$.*

Poznámka *Obdobné kritérium platí i pro vyšší kardinality než ω .*

Axiomatizovatelnost

Zajímá nás, zda se daná část světa dá “dobře” popsat.

Nechť $K \subseteq M(L)$ je třída struktur jazyka L . Řekneme, že K je

- *axiomatizovatelná*, pokud existuje teorie T jazyka L s $M(T) = K$,
- *konečně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná *konečnou* teorií,
- *otevřeně axiomatizovatelná*, pokud je axiomatizovatelná *otevřenou* teorií,
- *teorie T je konečně (otevřeně) axiomatizovatelná*, pokud $M(T)$ je konečně (respektive otevřeně) axiomatizovatelná.

Pozorování *Je-li K axiomatizovatelná, je uzavřená na elem. ekvivalenci.*

Například

- lineární uspořádání jsou konečně i otevřeně axiomatizovatelná,*
- tělesa jsou konečně axiomatizovatelná, ale ne otevřeně,*
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně.*

Důsledek kompaktnosti

Věta Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n -prvkový model, má T nekonečný model.

Důkaz V jazyce bez rovnosti je to zřejmé, uvažme jazyk s rovností.

- Označme $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid \text{pro } i \neq j\}$ extenzi teorie T v rozšířeném jazyce o spočetně nekonečně mnoho nových konstantních symbolů c_i .
- Dle předpokladu má každá konečná část teorie T' model.
- Tedy dle věty o **kompaktnosti** má T' model, ten je nutně nekonečný.
- Jeho redukt na původní jazyk je hledaný nekonečný model teorie T . □

Důsledek Má-li teorie T pro každé $n \in \mathbb{N}$ alespoň n -prvkový model, není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

Např. nelze axiomatizovat konečné grupy, konečná tělesa, atd. Avšak třída nekonečných modelů teorie T jazyka s rovností je axiomatizovatelná.

Konečná axiomatizovatelnost

Věta Necht' $K \subseteq M(L)$ a $\bar{K} = M(L) \setminus K$, kde L je jazyk. Pak K je *konečně axiomatizovatelná*, právě když K i \bar{K} jsou axiomatizovatelné.

Důkaz (\Rightarrow) Je-li T konečná axiomatizace K v *uzavřeném* tvaru, pak teorie s jediným axiomem $\bigvee_{\varphi \in T} \neg \varphi$ axiomatizuje \bar{K} . Nyní dokažme (\Leftarrow).

- Necht' T, S jsou teorie jazyka L takové, že $M(T) = K$, $M(S) = \bar{K}$.
- Pak $M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = \emptyset$ a dle věty o *kompaktnosti* existují konečné $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ takové, že $\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$.
- Jelikož

$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T),$$

je $M(T) = M(T')$, tj. konečná T' axiomatizuje K . \square

Konečná axiomatizovatelnost - příklad

Nechť T je teorie těles. Řekneme, že těleso $\mathcal{A} = \langle A, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je

- **charakteristiky 0**, neexistuje-li žádné $p \in \mathbb{N}^+$ takové, že $\mathcal{A} \models p1 = 0$, kde $p1$ značí term $1 + 1 + \dots + 1$ (+ aplikováno $(p - 1)$ -krát).
- **charakteristiky p** , kde p je prvočíslo, je-li p je nejmenší t.ž. $\mathcal{A} \models p1 = 0$.
- Třída těles charakteristiky p pro p prvočíslo je **konečně** axiomatizována teorií $T \cup \{p1 = 0\}$.
- Třída těles charakteristiky 0 je axiomatizována (**nekonečnou**) teorií $T' = T \cup \{p1 \neq 0 \mid p \in \mathbb{N}^+\}$.

Tvrzení Třída K těles charakteristiky 0 není **konečně** axiomatizovatelná.

Důkaz Stačí dokázat, že \bar{K} není axiomatizovatelná. Kdyby $M(S) = \bar{K}$, tak $S' = S \cup T'$ má model \mathcal{B} , neboť každá konečná $S^* \subseteq S'$ má model (těleso prvočíselné charakteristiky větší než jakékoliv p vyskytující se v axiomech S^*). Pak ale $\mathcal{B} \in M(S) = \bar{K}$ a zároveň $\mathcal{B} \in M(T') = K$, což není možné. \square

Otevřená axiomatizovatelnost

Věta *Je-li teorie T otevřeně axiomatizovatelná, pak každá podstruktura modelu T je rovněž modelem T .*

Důkaz Necht' T' je otevřená axiomatika $M(T)$, $\mathcal{A} \models T'$ a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Víme, že pro každé $\varphi \in T'$ je $\mathcal{B} \models \varphi$, neboť φ je otevřená. Tedy \mathcal{B} je modelem T' . \square

Poznámka *Platí i obrácená implikace, tj. je-li každá podstruktura modelu teorie T rovněž modelem T , pak T je otevřeně axiomatizovatelná.*

Např. teorie DeLO není otevřeně axiomatizovatelná, neboť např. konečná podstruktura modelu DeLO není modelem DeLO.

Např. nejvýše n -prvkové grupy pro pevné $n > 1$ jsou otevřeně axiomatizovány

$$T \cup \left\{ \bigvee_{\substack{i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i = x_j \right\},$$

kde T je (otevřená) teorie grup.