

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 9

7. prosince 2018

1. (předchozí DÚ, dokončení) Víme, že

- (a) všichni vinni lžou,
- (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
- (c) svědci nelžou.

Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

2. Označme $L(x, y)$ predikát “existuje let z x do y ” a $S(x, y)$ predikát “existuje spojení z x do y ”. Víme, že

- (a) z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku do Paříže,
- (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,
- (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,
- (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže.

3. Nechtě φ, ψ jsou sentence nebo jsou ve volné proměnné x , značíme $\varphi(x), \psi(x)$. Nalezněte tablo důkazy následujících formulí.

- (a) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
- (b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
- (c) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$, kde x není volná ve φ ,
- (d) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \rightarrow (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$, kde x není volná ve φ ,
- (e) $(\exists x)(\varphi \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ ,
- (f) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \rightarrow (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ ,
- (g) $\neg(\exists x)\varphi(x) \rightarrow (\forall x)\neg\varphi(x)$,
- (h) $(\forall x)\neg\varphi(x) \rightarrow \neg(\exists x)\varphi(x)$,
- (i) $(\exists x)(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall x)\varphi(x) \rightarrow \psi)$, kde x není volná ve ψ ,
- (j) $((\exists x)\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \psi)$, kde x není volná ve ψ .

4. Nechtě φ, ψ jsou ve volných proměnných x, y, z a w je proměnná nevyskytující se ve φ, ψ . Nalezněte tablo důkazy (uzávěrů) následujících formulí.

- (a) $(\forall x)(\exists y)\neg(\forall z)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)\neg\varphi$,
- (b) $(\exists x)(\forall y)((\forall z)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall w)(\varphi(z/w) \vee \psi)$,
- (c) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \vee (\exists z)\psi) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists w)(\varphi \vee \psi(z/w))$,
- (d) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \rightarrow (\forall z)\psi) \rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall w)(\varphi \rightarrow \psi(z/w))$.

5. (DÚ) Nechtě T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že

- (a) $T^* \models x = y \rightarrow y = x$ (symetrie =)
- (b) $T^* \models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$ (tranzitivita =)

Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (iii) vezměte $x_1 = x, x_2 = x, y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x, x_2 = y, y_1 = x$ a $y_2 = z$.

6. Dokažte větu o konstantách syntakticky pomocí transformací tabel.

Věta 1. *Nechť φ je formule jazyka L ve volných proměnných x_1, \dots, x_n a T je teorie jazyka L . Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly c_1, \dots, c_n a T' teorii T nad L' . Pak*

$$T \vdash (\forall x_1) \dots (\forall x_n) \varphi \quad \text{právě když} \quad T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

7. Dokažte větu o dedukci pomocí transformací tabel.

Věta 2. *Pro každou teorii T (v uzavřeném tvaru) a sentence φ, ψ ,*

$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi.$$

8. (předchozí DÚ) Nechť L je jazyk obsahující binární relační symbol E a konstantní symboly a, b a T je teorie, jež má za model každý (neorientovaný) graf, v němž mezi vrcholy a a b existuje konečná cesta. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má i model, ve kterém mezi vrcholy a, b neexistuje konečná cesta.

(Tento příklad ukazuje, že pojem *existence konečné cesty* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

9. (předchozí DÚ) Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol \leq a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model \mathcal{A} s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v \mathcal{A} existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

$$\dots < c_{n+1} < c_n < \dots < c_0.$$

(Tento příklad ukazuje, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

10. Převeďte následující formule do prenexního tvaru.

(a) $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$

(b) $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$

(c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

11. K předchozím formulím nalezněte Skolemovy varianty.

12. Ukažte, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, t.j. nalezněte příklad formule φ (vhodného jazyka) takovou, že pro její Skolemovu variantu ψ neplatí $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Domácí úkol

Příklad 5. (1 b).