

## Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 11

14. prosince 2018

1. (předpředchozí DÚ) Nechť  $L$  je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol  $\leq$  a  $T$  je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že  $T$  má model  $\mathcal{A}$  s nekonečným klesajícím řetězcem, tj. v  $\mathcal{A}$  existují prvky  $c_i$  pro  $i \in \mathbb{N}$  s

$$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

(Tento příklad ukazuje, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

2. (předchozí DÚ) Nechť  $T^*$  je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že

- (a)  $T^* \models x = y \rightarrow y = x$  (symetrie =)  
 (b)  $T^* \models (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$  (tranzitivita =)

*Nápověda:* pro (a) v axiomu rovnosti (iii) vezměte  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x$ ,  $y_1 = y$  a  $y_2 = x$ , pro (b) vezměte  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $y_1 = x$  a  $y_2 = z$ .

3. Převeďte následující formule do prenexního tvaru.

- (a)  $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$   
 (b)  $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$   
 (c)  $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

4. K předchozím formulím nalezněte Skolemovy varianty.

5. Ukažte, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, např. ověřte

- (a)  $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$   
 (b)  $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$

6. Nechť  $T'$  je rozšíření teorie  $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$  jazyka  $L = \langle +, 0, \leq \rangle$  s rovností o definice  $<$  a unárního  $-$  pomocí axiomů

$$\begin{aligned} -x = y &\leftrightarrow x + y = 0 \\ x < y &\leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y) \end{aligned}$$

Nalezněte formule původního jazyka  $L$  ekvivalentní v  $T'$  následujícím formulím.

- (a)  $x + (-x) = 0$   
 (b)  $x + (-y) < x$   
 (c)  $-(x + y) < -x$

7. Teorie těles  $T$  jazyka  $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  má mezi axiomy jediný axiom  $\varphi$ , který není otevřený:

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že  $T \models 0 \cdot y = 0$  a  $T \models (x \neq 0 \wedge x \cdot y = 1 \wedge x \cdot z = 1) \rightarrow y = z$ .

- (a) Nalezněte Skolemovu variantu  $\varphi_S$  formule  $\varphi$  s novým funkčním symbolem  $f$ .  
 (b) Nechť  $T'$  je teorie vzniklá z  $T$  nahrazením  $\varphi$  za  $\varphi_S$ . Je  $T' \models \varphi$ ?  
 (c) Lze každý model teorie  $T$  jednoznačně expandovat na model teorie  $T'$ ?  
 8. Nechť  $T$  je předchozí teorie. Označme  $\psi$  formulí  $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$ .

- (a) Platí v  $T$  podmínky existence a jednoznačnosti pro formulí  $\psi(x, y)$  a proměnnou  $y$ ?

- (b) Sestrojte extenzi  $T^*$  teorie  $T$  o definovaný symbol  $f$  formulí  $\psi$ .
- (c) Je  $T^*$  ekvivalentní teorii  $T'$  z přechodního příkladu?
- (d) K následující formuli nalezněte v  $T^*$  ekvivalentní formuli původního jazyka  $L$ .

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

9. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.
- (a)  $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$ , kde  $P, Q$  jsou unární resp. binární relační,  $f$  je unární funkční,  $a, b$  jsou konstantní symboly.
  - (b)  $L = \langle P, f, g, a \rangle$ , kde  $P$  je binární relační,  $f, g$  jsou unární funkční,  $a$  je konstantní.
10. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejspnitelnou konjuncti základních instancí jejich axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konstantní symboly  $a, b$ .
- (a)  $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$
  - (b)  $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$
  - (c)  $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
  - (d)  $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$
11. Převeďte následující formule na ekvivalentní formule v množinové reprezentaci.
- (a)  $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
  - (b)  $\neg(\forall y)(\exists x)P(x, y)$
  - (c)  $\neg(\exists x)((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$
  - (d)  $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x, z) \wedge P(z, y) \rightarrow R(x, y))$

### Poznámka

DÚ: příklady 7, 8 (dohromady za 1,5b, toto je poslední DÚ). Druhý test se bude psát na cvičení v pátek 4.1.