Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 13

4. ledna 2019

1. Test 2

2. Víme, že

   (a) Pokud je cihla na jiné cihle, tak není na zemi.
   (b) Každá cihla je buď na zemi nebo na jiné cihle.
   (c) Žádná cihla není na cihle, která je na další cihle.

   Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že když je cihla na jiné cihle, ta spodní je na zemi.

3. Ukažte, že následující množina klauzulí je rezolucí zamítnutelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého rezolučního kroku napište použitou substituci a označte rezolvované literály.

   (a) $\{P(a,x,f(y)), P(a,z,f(h(b))), \neg Q(y,z)\}$
   (b) $\{\neg Q(h(b),w), H(w,a)\}$
   (c) $\{\neg P(a,w,f(h(b))), H(x,a)\}$
   (d) $\{P(a,u,f(h(u))), H(u,a), Q(h(b),b)\}$
   (e) $\{\neg H(v,a)\}$

4. Uvažme struktury $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ se standardními uspořádáními.

   (a) Jsou navzájem elementárně neekvivalentní?
   (b) Jsou navzájem neizomorfní?
   (c) Určete kolik automorfismů tyto struktury mají.

5. Mějme jazyk $L = \langle U \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol.

   (a) Pro dané $n \in \mathbb{N}^+$ vyjádřete *"$U(x)$ platí právě pro n prvků x"* formulí φ.
   (b) Je teorie $T = \{\varphi\}$ kompletní?
   (c) Je T ω-kategorická?
   (d) Určete izomorfní spektrum teorie T (stačí pro spočetné kardinality).
   (e) Nalezeněte nějakou jednoduchou kompletní extenzi teorie T.
   (f) Určete všechny navzájem neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T.

6. Nechť T je extenze teorie *DeLO* (tj. hustých lineárních uspořádání bez konců) o nový konstantní symbol c (a žádné axiomy navíc).

   (a) Je T ω-kategorická?
   (b) Je T kompletní?
   (c) Platí totéž pokud místo *DeLO* vezmeme teorii $DeLO^+$ (hustá lineární uspořádání s maximálním prvkem a bez minimálního prvku)?

7. Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, abs^{\mathbb{R}} \rangle$ je struktura jazyka $L = \langle abs \rangle$, kde abs je unární funkční symbol, $\mathbb{R}$ jsou reálná čísla a $abs^{\mathbb{R}}$ je absolutní hodnota v $\mathbb{R}$.

   (a) Ukažte, že množiny $\{0\}$, $(0,+\infty)$, $(-\infty,0)$ jsou definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů.
   (b) Ukažte, že množiny $\{1\}$, $\{-1,1\}$, $(1,2)$ nejsou definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů.
   (c) Určete všechny automorfismy $\mathcal{A}$.

(d) Určete $\mathrm{Df}^1(\mathcal{A}, \emptyset)$, tj. všechny definovatelné množiny v $\mathcal{A}$ bez parametrů.

8. Nechť K je třída nekonečných grup.
   (a) Je K axiomatizovatelná?
   (b) Je K konečně axiomatizovatelná?
   (c) Je K otevřeně axiomatizovatelná?

9. Nechť $\underline{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ označuje n-tý *numerál*. Dokažte v Robinsonově aritmetice Q, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$
   (a) $Q \vdash \underline{m} = 0$, právě když $m = 0$,
   (b) $Q \vdash \underline{m} + \underline{n} = \underline{m+n}$,
   (c) $Q \vdash \underline{m} \leq \underline{n}$, právě když $m \leq n$.

10. Dokažte v Peanově aritmetice PA
   (a) $PA \vdash S(x) + y = S(x + y)$,
   (b) $PA \vdash 0 + x = x + 0$,
   (c) $PA \vdash x + y = y + x$.