Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 2

12. října 2018

1. (předchozí DÚ) Lze obarvit čísla od 1 do n dvěma barvami tak, že neexistuje monochromatické řešení rovnice $a + b = c$ s $1 \leq a < b < c \leq n$? Sestrojte výrokovou formuli φ_n (pokud možno v CNF) pro $n = 8$, která je splnitelná, právě když to lze.
2. Nainstalujte si SAT řešič `glucose`, formuli z předchozího příkladu uložte v DIMACS formátu a spusťte na ni `glucose`. Dále pomocí `glucose` nalezněte nejmenší n (dle Schurovy věty bude existovat), pro které v každém obarvení čísel 1 až n dvěma barvami bude existovat monochromatická trojice a, b, c s $a + b = c$.
3. Zobecněné stromy dle definice na přednášce.
   (a) Ukažte, že v každém stromě T pro každé prvky x, y s $x <_T y$ *mezi* x a y existuje bezprostřední následník x (syn).
   (b) Ukažte, že každý konečně větvící se strom, ve kterém má každý prvek (mimo kořene) otce, je nejvýše spočetný.
4. (DÚ) Dokažte, že pokud v definici výrokové formule nahradíme závorky $($, $)$ za $|$ (tj. závorka bez rozlišení levé a pravé), bude stále platit, že každá výroková formule má jednoznačně určený vytvořující strom.
5. Dokažte či vyvraťte, že následující množiny logických spojek jsou univerzální.
   (a) $\{\downarrow\}$, kde $\downarrow$ je Peirceova spojka (NOR)
   (b) $\{\uparrow\}$, kde $\uparrow$ je Shefferova spojka (NAND)
   (c) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$
6. Převeďte následující výroky do DNF a CNF a) tabulkou (určením modelů), b) ekvivalentními úpravami.
   (a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$
   (b) $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$
   (c) $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$
7. Ukažte, že pro spočetně nekonečnou množinu prvovýroků $\mathbb{P}$ neplatí, že každou $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ lze *namodelovat* výrokem v CNF i výrokem v DNF.
8. Dokažte následující tvrzení (z přednášky): *Nechť výrok φ obsahuje pouze spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Pak pro výrok φ^* vzniklý z φ záměnou $\wedge$ a $\vee$ a znegováním všech literálů platí, že $\neg\varphi \sim \varphi^*$.*
9. Nalezněte DNF i CNF reprezentaci Booleovské funkce $\mathrm{maj}\colon \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$, definované jako převládající hodnota ze tří (tj. majorita).
10. Nechť $\mathrm{maj}_n\colon \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$ je funkce majority po složkách, tj. např

    $$\mathrm{maj}_4((0,1,0,1),(1,1,0,0),(1,1,0,0)) = (1,1,0,0)$$

    Řekneme, že množina $K \subseteq \{0,1\}^n$ je *mediánová*, je-li uzavřená na funkci maj_n.
    (a) Dokažte, že pro každý výrok φ v 2-CNF je $M(\varphi)$ mediánová množina.
    (b) Dokažte, že je-li $K \subseteq \{0,1\}^n$ mediánová množina, existuje výrok φ v 2-CNF o n proměnných takový, že $M(\varphi) = K$.