

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 3

19. října 2018

1. (předchozí DÚ) Dokažte, že pokud v definici výrokové formule nahradíme závorky $(,)$ za $|$ (tj. závorka bez rozlišení levé a pravé), bude stále platit, že každá výroková formule má jednoznačně určený vytvořující strom.
2. Ukažte, že pro spočetně nekonečnou množinu prvovýroků \mathbb{P} neplatí, že každou $K \subseteq \mathbb{P}^2$ lze namodelovat výrokem v CNF i výrokem v DNF.
3. Dokažte následující tvrzení (z přednášky): *Nechť výrok φ obsahuje pouze spojky \neg, \wedge, \vee . Pak pro výrok φ^* vzniklý z φ záměnou \wedge a \vee a znegováním všech literálů platí, že $\neg\varphi \sim \varphi^*$.*
4. Pomocí implikačního grafu zjistěte, zda je následující výrok v 2-CNF splnitelný, popř. nalezněte splňující ohodnocení.

$$(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge \\ (p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge p_1$$

5. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný, popř. nalezněte splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge \\ (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_4 \vee p_5)$$

6. Uvažme teorii $T = \{-q \rightarrow (\neg p \vee q), \neg p \rightarrow q, r \rightarrow q\}$. Které výroky jsou pravdivé / lživé / nezávislé / splnitelné / ekvivalentní v T ?

- (a) p, q, r, s
- (b) $p \vee q, p \vee r, p \vee s, q \vee s$
- (c) $p \wedge q, q \wedge s, p \rightarrow q, s \rightarrow q$

7. Uvažme teorii $T = \{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\text{var}(T)$.

- (a) Které výroky ve tvaru $p_i \rightarrow p_j$ jsou důsledkem T ?
- (b) Které výroky tvaru $p_i \rightarrow (p_j \vee q_j)$ jsou důsledkem T ?
- (c) Určete všechny modely teorie T .

8. (DÚ, libovolné 3 podúlohy) Dokažte či vyvráťte (popř. uveďte správný vztah), že pro libovolnou teorii T a výroky φ, ψ, χ nad \mathbb{P} platí

- (a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg\varphi$
- (b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$
- (c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$
- (d) $T \models \varphi \rightarrow \psi$ a $T \models \psi \rightarrow \chi$, právě když $T \models \varphi \rightarrow \chi$

9. Dokažte anebo vyvráťte následující tvrzení, popř. uveďte správné vztahy. Pro libovolné teorie T a S nad \mathbb{P} platí

- (a) $S \subseteq T \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(S)$
- (b) $\theta^{\mathbb{P}}(S \cup T) = \theta^{\mathbb{P}}(S) \cup \theta^{\mathbb{P}}(T)$
- (c) $\theta^{\mathbb{P}}(S \cap T) = \theta^{\mathbb{P}}(S) \cap \theta^{\mathbb{P}}(T)$