Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 4

26. října 2018

1. (předchozí DÚ) Dokažte či vyvraťte (popř. uveďte správný vztah), že pro libovolnou teorii T a výroky φ, ψ, χ nad $\mathbb{P}$ platí
   - (a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg\varphi$
   - (b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$
   - (c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$
   - (d) $T \models \varphi \to \psi$ a $T \models \psi \to \chi$, právě když $T \models \varphi \to \chi$
2. Uvažme teorii $T = \{p_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \to (p_{i+1} \vee q_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(T)$.
   - (a) Které výroky ve tvaru $p_i \to p_j$ jsou důsledkem T?
   - (b) Které výroky tvaru $p_i \to (p_j \vee q_j)$ jsou důsledkem T?
   - (c) Určete všechny modely teorie T.
3. Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ s $|M(\varphi)| = m$.
   - (a) Kolik je neekvivalentních výroků ψ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?
   - (b) V kolika neekvivalentních teoriích nad $\mathbb{P}$ platí φ? V kolika neekvivalentních *kompletních* teoriích nad $\mathbb{P}$ platí φ?
   - (c) Kolik je neekvivalentních teorií T nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?
   - (d) Nechť navíc $\{\varphi, \psi\}$ je sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků χ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?
4. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.
   - (a) $(p \to (q \to p))$
   - (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
   - (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
   - (d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
   - (e) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

   Jsou zkonstruovaná tabla systematická?
5. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.
   - (a) $\{(\neg p \vee q) \to (\neg q \vee r)\}$
   - (b) $\{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$
   - (c) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$
6. Tablo metodou dokažte, či nalezněte protipříklad, že
   - (a) $\{\neg q,\ p \vee q\} \models p$,
   - (b) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\} \models s$,
   - (c) $\{p \to r,\ p \vee q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$.
7. Sestrojte atomické tablo pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR) a pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND).
8. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. pro každou teorii T, formule φ, ψ,

$$T \vdash \varphi \to \psi \text{ právě když } T, \varphi \vdash \psi.$$

9. Ukažte, že každé atomické tablo τ je *korektní*, tj. shoduje-li se ohodnocení v s položkou v kořeni τ, shoduje se i nějakou větví v τ.

10. V důkazu lemmatu o úplnosti tablo metody jsme na přednášce ověřili, že shoduje-li se ohodnocení v s každou položkou dokončené větve V do dané hloubky i vytvořujícího stromu, shoduje se i s položkou tvaru $T(\varphi \wedge \psi)$ či $F(\varphi \wedge \psi)$ na V, kde $\varphi \wedge \psi$ má hloubku $i + 1$. Dokažte totéž pro ostatní logické spojky.

11. (DÚ) Nechť $\mathcal{S}$ je spočetný neprázdný systém (množina) neprázdných konečných množin. Řekneme, že má *prostý selektor*, pokud existuje prostá funkce $f : \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ taková, že $f(S) \in S$ pro každé $S \in \mathcal{S}$. Dokažte, že $\mathcal{S}$ má prostý selektor, právě když má každá jeho neprázdná konečná podmnožina prostý selektor.