

Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 6

9. listopadu 2018

1. Test 1
2. V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule φ, ψ, χ následující vztahy.
 - (a) $\vdash_H \varphi \rightarrow \varphi$
 - (b) $T \vdash_H \varphi \rightarrow \chi$ pro $T = \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\}$
 - (c) $T \vdash_H \psi \rightarrow \chi$ pro $T = \{\varphi, \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)\}$
3. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převed'te na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.
 - (a) $(\exists x)(\forall y)P(y, z) \vee (y = 0)$
 - (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
 - (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$
4. Nechť φ je formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?
 - (a) term z za proměnnou x , term y za proměnnou x ,
 - (b) term z za proměnnou y , term $2 * y$ za proměnnou y ,
 - (c) term x za proměnnou z , term y za proměnnou z ,
5. Jsou následující formule variantou formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?
 - (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
 - (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
 - (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$
6. Pro jazyk $L = \langle P, f, c \rangle$, kde P je unární relační symbol, f je binární funkční symbol a c je konstanta nalezněte struktury \mathcal{A} a \mathcal{B} takové, že
 - (a) $\mathcal{A} \models (\forall x)P(f(x, c))$ a $\mathcal{B} \not\models (\forall x)P(f(x, c))$
7. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, \triangleright^A)$ pro jazyk s jediným binárním relačním symbolem \triangleright , kde $\triangleright^A = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, d)\}$. Určete, zda jsou následující formule v pravdivé v \mathcal{A} .
 - (a) $x \triangleright y$
 - (b) $(\exists x)(\forall y)(y \triangleright x)$
 - (c) $(\exists x)(\forall y)((y \triangleright x) \rightarrow (x \triangleright x))$
 - (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \triangleright z) \wedge (z \triangleright y))$
 - (e) $(\forall x)(\exists y)((x \triangleright z) \vee (z \triangleright y))$
8. Pro každou formuli φ z předchozího cvičení nalezněte strukturu \mathcal{B} (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$, právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
9. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí
 - (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
 - (b) $\models \varphi \rightarrow (\forall x)\varphi$
 - (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
 - (d) $\models \varphi \rightarrow (\exists x)\varphi$

Domácí úkol

2(b) či 2(c), za 0,5 bodu.