Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 7

16. listopadu 2018

1. (Předchozí DÚ) V Hilbertově kalkulu dokažte pro libovolné formule φ, ψ, χ.
   (a) $T \vdash_H \varphi \to \chi$ pro $T = \{\varphi \to \psi,\ \psi \to \chi\}$
   (b) $T \vdash_H \psi \to \chi$ pro $T = \{\varphi,\ \psi \to (\varphi \to \chi)\}$
2. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty, ve kterých nebudou proměnné s volným i vázaným výskytem zároveň.
   (a) $(\exists x)(\forall y)P(y,z) \vee (y = 0)$
   (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x = 0)$
   (c) $(\exists x)(x > y) \wedge (\exists y)(y > x)$
3. Nechť φ je formule $(\forall x)((x = z) \vee (\exists y)(f(x) = y) \vee (\forall z)(y = f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?
   (a) term z za proměnnou x, term y za proměnnou x,
   (b) term z za proměnnou y, term $2 * y$ za proměnnou y,
   (c) term x za proměnnou z, term y za proměnnou z,
4. Jsou následující formule variantou formule $(\forall x)(x < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq x))$?
   (a) $(\forall z)(z < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq z))$
   (b) $(\forall y)(y < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq y))$
   (c) $(\forall u)(u < y \vee (\exists z)(z = y \wedge z \neq u))$
5. Pro jazyk $L = \langle P, f, c\rangle$, kde P je unární relační symbol, f je binární funkční symbol a c je konstanta nalezněte struktury $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ takové, že
   (a) $\mathcal{A} \models (\forall x)P(f(x,c))$ a $\mathcal{B} \not\models (\forall x)P(f(x,c))$
6. Mějme strukturu $\mathcal{A} = (\{a,b,c,d\}, \rhd^A)$ pro jazyk s jediným binárním relačním symbolem $\rhd$, kde $\rhd^A = \{(a,c),(b,c),(c,c),(c,d)\}$. Určete, zda jsou následující formule v pravdivé v $\mathcal{A}$.
   (a) $x \rhd y$
   (b) $(\exists x)(\forall y)(y \rhd x)$
   (c) $(\exists x)(\forall y)((y \rhd x) \to (x \rhd x))$
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)((x \rhd z) \wedge (z \rhd y))$
   (e) $(\forall x)(\exists y)((x \rhd z) \vee (z \rhd y))$
7. Pro každou formuli φ z předchozího cvičení nalezněte strukturu $\mathcal{B}$ (pokud existuje) takovou, že $\mathcal{B} \models \varphi$, právě když $\mathcal{A} \not\models \varphi$.
8. Dokažte (sémanticky z definic) anebo nalezněte protipříklad, že pro každou formuli φ platí
   (a) $\varphi \models (\forall x)\varphi$
   (b) $\models \varphi \to (\forall x)\varphi$
   (c) $\varphi \models (\exists x)\varphi$
   (d) $\models \varphi \to (\exists x)\varphi$
9. Rozhodněte, zda jsou následující sentence (logicky) pravdivé / lživé / nezávislé.
   (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x) \vee \neg P(y))$

(b) $(\forall x)(P(x) \to Q(f(x))) \wedge (\forall x)P(x) \wedge (\exists x)\neg Q(x)$

(c) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to ((\forall x)(P(x) \vee (\forall x)Q(x))$

(d) $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$

(e) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

10. (DÚ, libovolné dvě podúlohy) Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, sentenci ψ,

    (a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$

    (b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$

    (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$

    (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

    Není součástí DÚ: Platí uvedené vztahy i pro formuli ψ, ve které x je volná proměnná? A pro formuli ψ, ve které x není volná?

11. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z \\ 0 + x = x &= x + 0 \\ x + (-x) = 0 &= (-x) + x \end{aligned}$$

    Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T.

    (a) $x + y = y + x$

    (b) $x + y = x \ \to \ y = 0$

    (c) $x + y = 0 \ \to \ y = -x$

    (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

12. Nechť $L = \langle F \rangle$ je jazyk s rovností, kde F je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:

    (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,

    (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,

    (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$.