Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 8

23. listopadu 2018

1. (předchozí DÚ, libovolné dvě podúlohy) Zdůvodněte (sémanticky) následující vztahy. Pro každou strukturu $\mathcal{A}$, formuli φ, sentenci ψ,

   (a) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \to \varphi)$

   (b) $\mathcal{A} \models (\psi \to (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \to \varphi)$

   (c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)$

   (d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \to \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \to \psi)$

   Platí uvedené vztahy i pro formuli ψ, ve které x je volná proměnná? A pro formuli ψ, ve které x není volná?

2. Uvažme teorii T (*teorie grup*) nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností, kde $+$ je binární funkční symbol, $-$ je unární funkční symbol, 0 konstantní symbol, s axiomy

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$0 + x = x = x + 0$$
$$x + (-x) = 0 = (-x) + x$$

   Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé / lživé / nezávislé v T.

   (a) $x + y = y + x$

   (b) $x + y = x \;\to\; y = 0$

   (c) $x + y = 0 \;\to\; y = -x$

   (d) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

3. Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0 \rangle$, kde binární funkce $+$ je sčítání modulo 4 a unární $-$ je funkce *inverzního* prvku vůči $+$ vzhledem k *neutrálnímu* prvku 0.

   (a) Je $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?

   (b) Určete generované podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}\langle a \rangle$ pro všechna $a \in \mathbb{Z}_4$.

   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Z}_4}$ i jiné podstruktury?

   (d) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ modelem teorie grup?

   (e) Je každá podstruktura $\underline{\mathbb{Z}_4}$ elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Z}_4}$?

   (f) Je každá podstruktura *komutativní* grupy komutativní grupou?

4. Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi (tvoří *těleso*).

   (a) Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem teorie grup?

   (b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ expandovat na model teorie grup?

   (c) Obsahuje $\underline{\mathbb{Q}}$ podstrukturu, která není elementárně ekvivalentní s $\underline{\mathbb{Q}}$?

   (d) Označme $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ množinu všech sentencí pravdivých v $\underline{\mathbb{Q}}$. Je $Th(\underline{\mathbb{Q}})$ kompletní teorie?

5. Mějme teorii $T = \{x = c_1 \vee x = c_2 \vee x = c_3\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností.

   (a) Je T (sémanticky) bezesporná?

   (b) Jsou všechny modely T elementárně ekvivalentní? Tj. je T (sémanticky) kompletní?

   (c) Určete všechny její jednoduché kompletní extenze (až na ekvivalenci).

(d) Je teorie $T' = \{x = c_1 \vee x = c_4\}$ nad jazykem $L = \langle c_1, c_2, c_3, c_4\rangle$ extenzí T? Je T' jednoduchou extenzí? Je T' konzervativní extenzí? Je teorie $T^* = T \cup T'$ konzervativní extenzí teorie T?

6. Uvažme níže uvedenou filmovou databázi jako relační strukturu $\mathcal{D} = \langle D, Filmy, Program, c^D\rangle_{c\in D}$ jazyka $L = \langle F, P, c\rangle_{c\in D}$ s rovností, kde $D = \{$'Po strništi bos', 'J. Tříska', 'Mat', '13:15', $\dots\}$ a $c^D = c$ pro každé $c \in D$. Napište formule definující v $\mathcal{D}$ tabulku

   (a) filmů, ve kterých hraje jejich režisér,

   (b) kin a časů, kdy je možné shlédnout film, ve kterém hraje jeho režisér,

   (c) režisérů, kteří hrají ve filmech promítaných v kinu Mat,

   (d) herců či režisérů, jejichž film se nikde nepromítá.

Filmy	*název*	*režisér*	*herec*
	Lidé z Maringotek	M. Frič	J. Tříska
	Po strništi bos	J. Svěrák	Z. Svěrák
	Po strništi bos	J. Svěrák	J. Tříska
	...	...	...

Program	*kino*	*název*	*čas*
	Světozor	Po strništi bos	13:15
	Mat	Po strništi bos	16:15
	Mat	Lidé z Maringotek	18:30
	...	...	...

7. (DÚ) Nechť $L = \langle F\rangle$ je jazyk s rovností, kde F je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:

   (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot\rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,

   (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,

   (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup\rangle$.

8. Víme, že

   (a) všichni vinni lžou,

   (b) alespoň jeden obviněný je svědek,

   (c) svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

9. Označme $L(x, y)$ predikát *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ predikát *"existuje spojení z x do y"*. Víme, že

   (a) z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku do Paříže,

   (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow L(y, x))$,

   (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \rightarrow S(x, y))$,

   (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow S(x, z))$.

   Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže.