Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 9

30. listopadu 2018

1. (předchozí DÚ) Nechť $L = \langle F \rangle$ je jazyk s rovností, kde F je binární funkční symbol. Napište formule definující (bez parametrů) v následujících strukturách následující množiny:
   (a) interval $(0, \infty)$ v $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, kde $\cdot$ je standardní násobení reálných čísel,
   (b) množinu $\{(x, 1/x) \mid x \neq 0\}$ ve stejné struktuře $\mathcal{A}$,
   (c) množinu všech nejvýše jednoprvkových podmnožin $\mathbb{N}$ v $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup \rangle$.
2. Uvažme níže uvedenou filmovou databázi jako relační strukturu $\mathcal{D} = \langle D, Filmy, Program, c^D \rangle_{c \in D}$ jazyka $L = \langle F, P, c \rangle_{c \in D}$ s rovností, kde $D = \{$'Po strništi bos', 'J. Tříska', 'Mat', '13:15', $\dots\}$ a $c^D = c$ pro každé $c \in D$. Napište formule definující v $\mathcal{D}$ tabulku
   (a) filmů, ve kterých hraje jejich režisér,
   (b) kin a časů, kdy je možné shlédnout film, ve kterém hraje jeho režisér,
   (c) režisérů, kteří hrají ve filmech promítaných v kinu Mat,
   (d) herců či režisérů, jejichž film se nikde nepromítá.

Filmy	*název*	*režisér*	*herec*
	Lidé z Maringotek	M. Frič	J. Tříska
	Po strništi bos	J. Svěrák	Z. Svěrák
	Po strništi bos	J. Svěrák	J. Tříska
	...	...	...

Program	*kino*	*název*	*čas*
	Světozor	Po strništi bos	13:15
	Mat	Po strništi bos	16:15
	Mat	Lidé z Maringotek	18:30
	...	...	...

3. Víme, že
   (a) všichni vinni lžou,
   (b) alespoň jeden obviněný je svědek,
   (c) svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.
4. Označme $L(x, y)$ predikát *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ predikát *"existuje spojení z x do y"*. Víme, že
   (a) z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku do Paříže,
   (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to L(y, x))$,
   (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to S(x, y))$,
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \to S(x, z))$.

   Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže.
5. Nechť φ, ψ jsou sentence nebo jsou ve volné proměnné x, značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Nalezněte tablo důkazy následujících formulí.
   (a) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,
   (b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,
   (c) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \to (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (d) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \to (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (e) $(\exists x)(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ,
   (f) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \to (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ,

(g) $\neg(\exists x)\varphi(x) \to (\forall x)\neg\varphi(x)$,

(h) $(\forall x)\neg\varphi(x) \to \neg(\exists x)\varphi(x)$,

(i) $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\forall x)\varphi(x) \to \psi)$, kde x není volná ve ψ,

(j) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$, kde x není volná ve ψ.

6. Nechť φ, ψ jsou ve volných proměnných x, y, z a w je proměnná nevyskytující se ve φ, ψ. Nalezněte tablo důkazy (uzávěrů) následujících formulí.

   (a) $(\forall x)(\exists y)\neg(\forall z)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)\neg\varphi$,

   (b) $(\exists x)(\forall y)((\forall z)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall w)(\varphi(z/w) \vee \psi)$,

   (c) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \vee (\exists z)\psi) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists w)(\varphi \vee \psi(z/w))$,

   (d) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \to (\forall z)\psi) \to (\forall x)(\exists y)(\forall w)(\varphi \to \psi(z/w))$.

7. Nechť T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že

   (a) $T^* \models x = y \;\to\; y = x$ (symetrie $=$)

   (b) $T^* \models (x = y \;\wedge\; y = z) \;\to\; x = z$ (tranzitivita $=$)

   Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (iii) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

8. Dokažte větu o konstantách syntakticky pomocí transformací tabel.

   Věta 1. *Nechť φ je formule jazyka L ve volných proměnných $x_1, \dots, x_n$ a T je teorie jazyka L. Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \dots, c_n$ a T' teorii T nad L'. Pak*

   $$T \vdash (\forall x_1)\dots(\forall x_n)\varphi \quad \textit{právě když} \quad T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

9. Dokažte větu o dedukci pomocí transformací tabel.

   Věta 2. *Pro každou teorii T (v uzavřeném tvaru) a sentence φ, ψ,*

   $$T \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi.$$

10. Nechť L je jazyk obsahující binární relační symbol E a konstantní symboly a, b a T je teorie, jež má za model každý (neorientovaný) graf, v němž jsou vrcholy a a b ve stejné komponentě souvislosti. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má i model, ve kterém jsou vrcholy a, b v různých komponentách souvislosti.

    (Tento příklad ukazuje, že pojem *souvislosti v grafu* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

11. Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v $\mathcal{A}$ existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

    $$\dots < c_{n+1} < c_n < \dots < c_0.$$

    (Tento příklad ukazuje, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

Domácí úkol

Příklad 3. (dokončení, 0,5 b) a příklad 10. či 11. (1b).