Zkouška VPL - písemná část

8. ledna 2019

1. Pavel a Quido hrají kámen/nůžky/papír v nekonečně mnoha kolech (očíslovaných přirozenými čísly). O hře a strategii těchto hráčů víme, že

   (i) *V každém kole volí každý hráč právě jednu ze tří možností kámen/nůžky/papír.*

   (ii) *Pavel hraje tak, aby v kole vyhrál, pokud Quido zopakuje svůj tah (z předchozího kola).*

   (iii) *Quido opakuje tah po Pavlovi (z předchozího kola).*

   Rezolucí chceme dokázat, že

   (iv) *Když hra začne v prvním kole remízou (konkrétně v kamenech), tak v třetím kole bude opět remíza (konkrétně v papíru).*

   Nechť prvovýroky p_i^k, p_i^n, p_i^p a q_i^k, q_i^n, q_i^p pro $i \geq 1$ označují, že *"v i-tém kole Pavel zvolil kámen, nůžky, papír (respektive)"* a *"v i-tém kole Quido zvolil kámen, nůžky, papír (respektive)"*. Označme $\mathbb{P} = \{p_i^k, p_i^n, p_i^p, q_i^k, q_i^n, q_i^p \mid i \geq 1\}$.

   (a) Napište množiny T_1, T_2, T_3 výroků nad $\mathbb{P}$ vyjadřující (po řadě) tvrzení $(i), (ii), (iii)$ a výrok φ vyjadřující (iv). *(2b)*

   (b) Převodem axiomů teorie $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ a výroku φ či jejich negací na CNF napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T \models \varphi$. *(2b)*

   (c) Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(3b)*

   (d) Napište teorii T' nad jazykem $\mathbb{P}' = \{p_i^k, p_i^p, q_i^k, q_i^p \mid i \geq 1\}$ takovou, že T je konzervativní extenzí teorie T'. (*Nápověda: vyjádřete totéž bez prvovýroku o nůžkách.*) *(2b)*

   (e) Zjistěte, kolik má teorie T jednoduchých kompletních extenzí. Napište jednu takovou jednoduchou kompletní extenzi. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\forall x)(P(x) \vee Q(x)),\ (\exists x)(\neg Q(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q \rangle$ bez rovnosti, kde P, Q jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\forall x)P(x)$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. *(3b)*

   (b) Z nejlevější bezesporné větve předchozího tabla sestrojte kanonický model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí. *(2b)*

   (c) Je φ dokazatelná, zamítnutelná, nebo nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Má teorie T konzervativní kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť T je teorie v jazyce $L = \langle <, f, g \rangle$ s rovností, kde f, g jsou unární funkční symboly a $<$ je binární relační symbol, s axiomy

$$\begin{aligned} \varphi_1: &\quad (\forall u)(\exists v)(\forall x)(v < x \rightarrow u < f(x)), \\ \varphi_2: &\quad (\exists u)(\forall v)(\exists x)(v < x \wedge \neg(u < g(x))). \end{aligned}$$

   (a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*

   (b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <, \mathrm{id}, \mathrm{tg}' \rangle$, kde $<$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$, $\mathrm{id}(r) = r$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tg}'(k\pi/2) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a $\mathrm{tg}'(r) = \mathrm{tg}(r)$ (tg je funkce tangens) pro $r \neq k\pi/2$ s $k \in \mathbb{Z}$. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*

   (c) Uveďte příklady množiny definovatelné a množiny nedefinovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*