

Zkouška VPL - písemná část

14. února 2019

- Mějme bludiště $B_{Z,C}^n$ na čtvercové mřížce $n \times n$ zadané množinou Z dvojic místností, mezi kterými je zeď, a množinou C dvojic místností a časů, ve kterých jsou tyto místnosti uzavřené. Např. pro bludiště na obrázku níže, kde šedě vybarvené místnosti jsou uzavřené v časech, které nejsou dělitelné třemi, je

$$Z = \{(0, 1), (1, 1)\}, \{(1, 1), (1, 2)\}, \{(2, 0), (2, 1)\},$$

$$C = \{(1, 1), t), ((1, 2), t) \mid t \text{ není dělitelné } 3\}.$$

(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)
(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)
(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)

Definujme, že místnost je v bludišti v čase t dosažitelná právě tehdy, když sousedí s místností dosažitelnou v čase $t - 1$, není mezi nimi zeď a není uzavřená v čase t .

- Mějme množinu prvovýroků $\mathbb{P} = \{d_{ij}^t \mid 1 \leq i, j \leq n, t \in \mathbb{N}\}$, kde d_{ij}^t značí, že místnost (i, j) je dosažitelná v čase t . Pro obecné bludiště $B_{Z,C}^n$ napište teorii $T_{Z,C}^n$ nad \mathbb{P} , která vyjadřuje pravidla pro dosažitelnost v tomto bludišti. (2b)
 - Napište teorii T , která vyjadřuje dosažitelnost pro bludiště na obrázku, a navíc obsahuje informaci, že místnost $(0,0)$ je dosažitelná v čase $t = 0$. Stačí explicitně vypsát axiomy pro dosažitelnost místností $(0,0)$, $(0,1)$ a $(1,1)$ pro časy $0 \leq t \leq 6$. Zapište teorii T v množinové reprezentaci. (2b)
 - Dokažte pomocí rezoluce, že $T \vdash_R d_{11}^6$, tj. že místnost $(1, 1)$ je dosažitelná v čase $t = 6$.
Nápověda: Promyslete si, jak do místnosti dojít. (4b)
 - Je teorie T z (b) kompletní? Pokud ne, napište nějakou její jednoduchou kompletní extenzi. (2b)
- Nechť $T = \{\neg(\exists x)R(x), (\exists x)(\forall y)(P(x, y) \rightarrow P(y, x)), (\forall x)((\exists y)(P(x, y) \wedge P(y, x)) \rightarrow R(x)), (\forall x)(\exists y)P(x, y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, R jsou binární resp. unární relační symboly.
 - Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
 - Tablo metodou dokažte, že T' je nespplnitelná. (4b)
 - Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nespplnitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* (2b)
 - Má teorie T jednoduchou kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - Nechť $T = \{\varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ s rovností, kde P, R jsou unární relační symboly s axiomem φ vyjadřujícím, že " $P(x) \vee R(x)$ platí pro právě 3 prvky x ."
 - Určete izomorfní spektrum $I(T, \kappa)$ teorie T pro všechna spočetná κ . (2b)
 - Nalezněte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T nebo zdůvodněte, proč neexistují. (2b)
 - Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)